Höhere Mathematik 3
für phys, kyb, mech
Erste Modulprüfung
Ws 2019/20
26.02.2020

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 60. Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Alle Schritte sind zu begründen. Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Ihren Studiengang ein.

Name	M-Nr	Studiengang

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨10⟩ **Aufgabe 1**

Die 2π-periodische Funktion f ist auf dem Intervall $(-\pi,\pi)$ gegeben durch

$$f(x) = |x|\,(\pi - |x|).$$

a. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.
b. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von f.
c. Warum konvergiert die Fourierreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$?
d. Was ist der Wert der Fourierreihe bei $x = \pi$?
e. Zeigen Sie mithilfe der Fourierreihe, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

⟨4⟩ **Aufgabe 2**

a. Skizzieren Sie die Menge

$$B = \left\{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant x \wedge \sqrt{3}/2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \sqrt{2}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

b. Sei S der Graph der Funktion $\varphi\colon B \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$O = \int_S \arctan(y/x)\,\mathrm{d}A.$$

⟨5⟩ **Aufgabe 3**

Aus dem Zylinder $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ wird durch die xy-Ebene und die Fläche

$$\left\{(x,y,z) : z = \mathrm{e}^{x^2+y^2}\right\}$$

ein Körper K mit der Dichte $\rho(x,y,z) = y^2$ ausgeschnitten.
a. Parametrisieren Sie K durch Zylinderkoordinaten.
b. Bestimmen Sie die Masse des Körpers K, also $m = \int_K \rho\,\mathrm{d}V$.
c. Bestimmen Sie die z-Koordinate seines Schwerpunkts, also $m^{-1}\int_K z\rho\,\mathrm{d}V$.

⟨7⟩ **Aufgabe 4**

Gegeben ist das Vektorfeld $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} \lambda xz + y^3 \\ \mu x y^2 + z \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie
a. diejenigen Parameter λ und μ, für die V ein Gradientenfeld ist,
b. für diese Fälle ein Potential Φ zu V,
c. ebenfalls für diese Fälle das Kurvenintegral von V entlang der Kurve

$$\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t, 2t, 3t)^\top.$$

⟨11⟩ **Aufgabe 5**

Gegeben ist die skalare Differenzialgleichung

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Bestimmen Sie

a. die allgemeine reelle Lösung *(Hinweis: Prüfen Sie, ob* e^x *eine Lösung ist)*,
b. diejenige Lösung y_0 mit $y_0(0) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = 0$,
c. die Menge aller Lösungen mit $y(0) = 0$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleiben,
d. die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = -20\cos 2x.$$

⟨6⟩ **Aufgabe 6**

Berechnen Sie mittels Residuensatz das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos 3t}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Mit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ist $\cos t = (z + z^{-1})/2$.

⟨13⟩ **Aufgabe 7**

Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_t + u = u_{xx}, \qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Bestimmen Sie

a. mit dem Ansatz $u(t,x) = f(t)g(x)$ gewöhnliche Differenzialgleichungen für f und g,
b. die allgemeine Lösung g, die die Randbedingungen erfüllt,
c. die allgemeine Lösung f,
d. die formale allgemeine Lösung u,
e. diejenige Lösung mit $u(0,x) = \cos(2x) + 4\cos(6x)$.

⟨4⟩ **Aufgabe 8**

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\mathcal{D}$ der Raum aller C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompakten Träger.

a. Wie ist die Distribution $\Lambda_f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ erklärt?
b. Wie ist die Ableitung $(\Lambda_f)'$ von Λ_f im Distributionssinn erklärt?
c. Zeigen Sie: Ist f stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$.