**Aufgabe 1** (*10 Punkte/7 Punkte (EL)*) Die $2\pi$-periodische Funktion $f$ ist auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ gegeben durch

$$f(x) = |x|(\pi - |x|).$$

**(a)** Skizzieren Sie $f$ auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.

**(b)** Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von $f$

**(c)** Warum konvergiert die Fourierreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$?

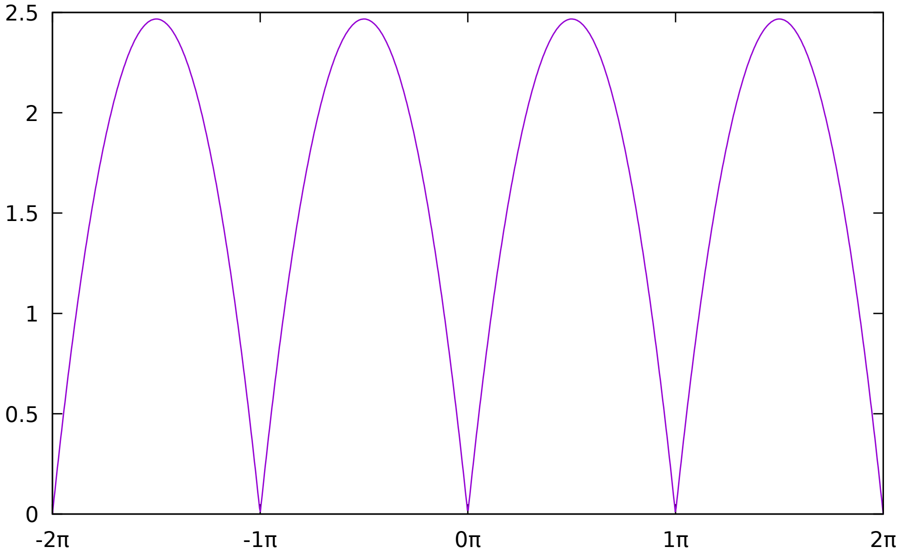
**(d)** Was ist der Wert der Fourierreihe bei $x = \pi$?

**(e)** Zeigen Sie mit Hilfer der Fourierreihe, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

---

**(a)** Skizze:




**(b)** Da $f$ eine gerade Funktion ist, ist $b_n = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$
\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\pi-|x|)\mathrm{d}x \\
\overset{f \text{ gerade}}{=}& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi-x)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\pi-|x|)\cos(kx)\mathrm{d}x \\
\overbrace{=}^{f \text{ gerade}}& \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi-x)\cos(kx)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{x(\pi-x)\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\sin(kx)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi k}\left[\frac{(\pi-2x)\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k^2}\int_0^{\pi} 2\cos(kx)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi k^2}(-\pi(-1)^k-\pi) - \frac{4}{\pi k^3}\left[\sin(kx)\right]_0^{\pi} \\
=& -\frac{2}{k^2}(1+(-1)^k)
\end{aligned}
$$

Somit ist $a_k = 0$ für ungerades $k$ und

$$a_{2k} = -\frac{1}{k^2}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

**(c)** Da $f$ stückweise glatt ist, ist Konvergenzsatz 7 anwendbar: Ist $f$ $2\pi$-periodisch und stückweise glatt, so konvergiert ihre Fourierreihe in den Stetigkeitspunkten gegen $f$ und in den Sprungstellen gegen die jeweilige Sprungmitte von $f$. *Hinweis: Die Stetigkeit der Funktion genügt nicht. Es gibt stetige Funktionen, deren Fourierreihe in bestimmten Punkten nicht konvergiert.*

**(d)** Da $f$ stückweise glatt und auf ganz $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar ist, gilt mit dem Satz aus (c) dass die Fourierreihe in $\pi$ gegen die stetige Fortsetzung von $f$ konvergiert. Also den Wert $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ annimmt.

**(e)** Es gilt, da $f$ reellwertig und $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, dass $c_k = a_k/2 = c_{-k}$. Nach der Parseval'schen Gleichung ist weiter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x =& \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}}|c_{-k}|^2 + |c_0|^2 + \sum_{k\in\mathbb{N}}|c_k|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{k\in\mathbb{N}}|c_k|^2 \\
=& \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}^2}{2} = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}.
\end{aligned}
$$

Das Integral errechnet sich als

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x \overbrace{=}^{f\text{ gerade}} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi-x)^2\mathrm{d}x \\ =&\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2x^3}{3}-\frac{2\pi x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} \\ =&\pi^4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) \\ =&\frac{\pi^4}{30}\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=2\left(\frac{\pi^4}{30}-\frac{\pi^4}{36}\right)=\frac{\pi^4}{90}$$

**Aufgabe 2** (*4 Punkte*)

**(a)** Skizzieren Sie die Menge

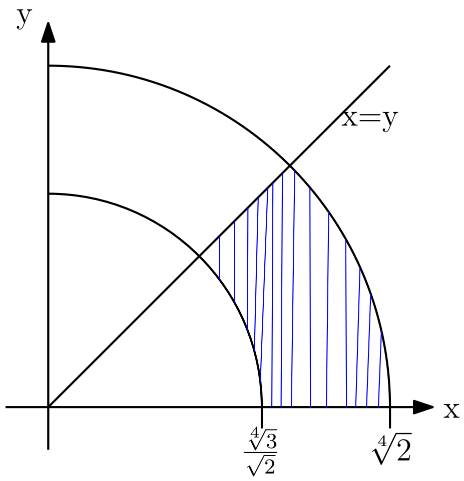
$$B = \left\{(x,y) \;:\; 0 \leq y \leq x \wedge \sqrt{3}/2 \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

**(b)** Sei $S$ der Graph der Funktion $\varphi : B \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$O = \int_S \arctan(x/y) \mathrm{d}A.$$

---

**(a)** Skizze:




**(b)**

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x,y) \in B,\ z = \varphi(x,y) = x^2 + y^2\right\}$$

Zur Berechnung des Oberflächenelements braucht man $\varphi_x = \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}(x,y) = 2x$ und $\varphi_y = \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}(x,y) = 2y$. Weiterhin ergibt sich mit der Parametrisierung (vgl. Skript Beispiel 32.6.21):

$$\chi :\ B \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y) \mapsto (x, y, \varphi(x,y))^\top,$$

und den partiellen Ableitungen

$$\chi_x = (1,\ 0,\ \varphi_x)^\top, \qquad \chi_y = (0,\ 1,\ \varphi_y)^\top$$
$$\|\chi_x \times \chi_y\| = \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2},$$

sodass sich das Oberflächenintegral mit der Definition

$$\int_S f \mathrm{d}A = \int_B (f \circ \chi)\|\chi_x \times \chi_y\| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(wobei $f = \arctan(x, y)$) berechnen lässt. Die Winkelhalbierende führt zu einer Integration von 0 bis $\pi/4$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
O &= \int_S \arctan(y/x)\mathrm{d}A = \int_B \arctan(y/x)\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_B \arctan(y/x)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{r=\sqrt[4]{3}/\sqrt{2}}^{\sqrt[4]{2}} \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \underbrace{\arctan\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}}_{\arctan(\tan\varphi)=\varphi} \sqrt{1+4r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_{r=\sqrt[4]{3}/\sqrt{2}}^{\sqrt[4]{2}} r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Nun wird wieder substituiert. Wir substituieren $u := 1+4r^2$ und damit $\mathrm{d}u = 8r\mathrm{d}r$. Die Integralgrenzen ändern sich damit von $\sqrt[4]{3}/\sqrt{2} \to 1+2\sqrt{3}$ und von $\sqrt[4]{2} \to 1+4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi^2}{2}\bigg|_0^{\pi/4} \int_{u=1+2\sqrt{3}}^{1+4\sqrt{2}} \frac{1}{8}\sqrt{u} \\
&= \frac{\pi^2}{12\cdot 32}u^{3/2}\bigg|_{u=1+2\sqrt{3}}^{1+4\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi^2}{384}\cdot((1+4\sqrt{2})^{3/2}-(1+2\sqrt{3})^{3/2})
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (*5 Punkte*) Aus dem Zylinder $\{(x,y,z): \ x^2+y^2 \le 4\}$ wird durch die $xy$-Ebene und die Fläche

$$\big\{(x,y,z) \ : \ z = \exp(x^2+y^2)\big\}$$

ein Körper $K$ mit der Dichte $\rho(x,y,z) = y^2$ ausgeschnitten.

**(a)** Parametrisieren Sie $K$ durch Zylinderkoordinaten.

**(b)** Bestimmen Sie die Masse von $K$, also $m = \int_K \rho \mathrm{d}V$.

**(c)** Bestimmen Sie die $z$-Koordinate des Schwerpunkts von $K$, also $m^{-1}\int_K z\rho \mathrm{d}V$.

---

**(a)** Parametrisierung:

$$K = \big\{(r,\varphi,z) \ : \ 0 \le \varphi < 2\pi, \ 0 \le r \le 2, \ 0 \le z \le \exp(r^2)\big\}$$

**(b)** Mit Zylinderkoordinaten

$$(x,y,z)^\top = (r\cos(\varphi), \ r\sin(\varphi), \ z)^\top$$

folgt für die Masse $m$

$$m = \int_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\exp(r^2)} r^2\sin^2\varphi r \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi}_{=\pi}\int_0^2 r^3\int_0^{\exp(r^2)} 1\mathrm{d}z\mathrm{d}r$$

Der Wert des ersten Integrals ist $\pi$. Beim zweiten Integral wird $u = r^2$ substituiert, und es folgt

$$\int_0^2 r^3\int_0^{\exp(r^2)} 1\mathrm{d}z\mathrm{d}r = \int_0^2 r^3\exp(r^2)\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^4 u\exp(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[(u-1)\exp(u)\right]_0^4 = \frac{3}{2}\exp(4) + \frac{1}{2}$$

Also folgt

$$m = \frac{\pi}{2}(3\exp(4)+1)$$

**(c)**

$$\begin{aligned}
s_3 =& \frac{1}{m}\int_V z\rho(x)\mathrm{d}V \\
=& \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\exp r^2} zr^3\sin^2\varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{\pi}{2m}\int_0^2 r^3\exp(2r^2)\mathrm{d}r \\
=& \frac{\pi}{4m}\underbrace{\int_0^4 u\exp(2u)\mathrm{d}u}_{=\frac{1}{4}(1+7\exp(8)} \\
=& \frac{7\exp(8)+1}{8(3\exp(4)+1)}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4** (*7 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$V(x, y, z) = \begin{pmatrix} \lambda xz + y^3 \\ \mu xy^2 + z \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

**(a)** diejenigen Parameter $\lambda$ und $\mu$, für die $V$ ein Gradientenfeld ist,

**(b)** für diese Fälle ein Potential $\Phi$ zu $V$,

**(c)** ebenfalls für diese Fälle das Kurvenintegral von $V$ entlang der Kurve

$$\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t, 2t, 3t)^{\mathrm{T}}.$$

---

**(a)** Für die Existenz eines Gradientenfeldes $V$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist hier (mit $V = (V_1, V_2, V_3)^{\mathrm{T}}$) $\operatorname{rot} V = 0$ hinreichend und notwendig:

$$\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} & - & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} & - & \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & - & \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ \lambda x - 2x \\ \mu y^2 - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - 2)x \\ (\mu - 3)y^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\operatorname{rot} V = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \wedge \mu = 3$.

**(b)** Es muss $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = V_1$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_2$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = V_3$ gelten, also:

$$\Phi(x, y, z) = h_1(y, z) + \int \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = h_1(y, z) + \int 2xz + y^3 \, dx \qquad = h_1(y, z) + zx^2 + y^3 x,$$
$$\Phi(x, y, z) = h_2(x, z) + \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = h_2(x, z) + \int 3xy^2 + z \, dy \qquad = h_2(x, z) + xy^3 + zy,$$
$$\Phi(x, y, z) = h_3(x, y) + \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = h_3(x, y) + \int x^2 + y \, dz \qquad = h_3(x, y) + x^2 z + yz.$$

Somit ist $\Phi(x, y, z) = yz + x^2 z + xy^3$ $(+C \text{ mit } C \in \mathbb{R})$ ein Potential zu $V$.

**(c)** $V$ ist Potentialfeld (also Wegunabhängigkeit bei Integration). Deshalb kann man das Wegintegral über die Auswertung des Potentials berechnen:

$$\int_\gamma V \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \Phi(\gamma(2)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(2, 4, 6) - \Phi(0, 0, 0) = 176.$$

**Aufgabe 5** (*11 Punkte*) Gegeben ist die skalare Differenzialgleichung

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Bestimmen Sie

**(a)** die allgemeine reelle Lösung unter Verwendung, dass $y = e^x$ die Gleichung löst,

**(b)** diejenige Lösung $y_0$ mit $y_0(0) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = 0$,

**(c)** die Menge aller Lösungen mit $y_1(0) = 0$, die für $x \to \infty$ beschränkt bleiben,

**(d)** die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = -20\cos(2x).$$

---

**(a)** Das charakteristische Polynom der DGL lautet $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4$ .

Eine Nullstelle kann sehr einfach erraten werden (bzw. sie ergibt sich daraus, dass $y = e^x$ die Gleichung löst): $\lambda_1 = 1$ . Nach Polynomdivison,

$$\mathcal{P}(\lambda) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 4,$$

folgen direkt die weiteren Nullstellen: $\lambda^2 = -4 \iff \lambda_{2,3} = \pm 2i$. (Somit lautet das komplexe bzw. reelle Fundamentalsystem $\mathrm{FS}_{\text{complex}} = \{e^x, e^{2ix}, e^{-2ix}\}$, $\mathrm{FS}_{\text{real}} = \{e^x, \cos(2x), \sin(2x)\}$.) Die allgemeine reelle Lösung lautet

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^x + c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x), \text{ mit } c_{1,2,3} \in \mathbb{R}.$$

**(b)** Wir fordern $y_0(x)\big|_{x=0} = 0$. Also $0 \overset{!}{=} c_1 e^0 + c_2\cos(0) + c_3\sin(0) = c_1 + c_2$, womit $c_2 = -c_1$ gelten muss. Zusätzlich ist $\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0 \wedge c_3 = 0$, also

$$y_0(x) \equiv 0.$$

**(c)** Wie in (b) muss $c_2 = -c_1$ sein. Da die Lösung beschränkt bleiben soll für $x \to \infty$ folgt $c_1 = 0$ und somit auch $c_2 = 0$. Somit ist die Menge aller Lösungen

$$\{x \mapsto y(x) = c\sin(2x) : c \in \mathbb{R}\}.$$

**(d)** Bei der Art der rechten Seite handelt es sich um Resonanz. Für die partikuläre Lösung wählen wir daher den Ansatz

$$y_p(x) = cx\sin(2x) + dx\cos(2x).$$

Damit ergeben sich die Ableitungen zu

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \sin(2x)(c-2dx) + \cos(2x)(2cx+d) \\ y_p''(x) &= 4\cos(2x)(c-dx) - 4\sin(2x)(cx+d) \\ y_p'''(x) &= -4\sin(2x)(3c-2dx) - 4\cos(2x)(2cx+3d) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL mit inhomogener rechter Seite liefert

$$\begin{aligned} &-4\sin(2x)(3c-2dx) - 4\cos(2x)(2cx+3d) \\ &-4\cos(2x)(c-dx) + 4\sin(2x)(cx+d) \\ &+4\sin(2x)(c-2dx) + 4\cos(2x)(2cx+d) \\ &-4cx\sin(2x) - 4dx\cos(2x) \overset{!}{=} -20\cos(2x) \end{aligned}$$

also

$$\sin(2x)\,4\underbrace{(d-2c)}_{\overset{!}{=}0 \Leftrightarrow d=2c} - \cos(2x)(8d+4c) \overset{!}{=} -20\cos(2x)$$

bzw.

$$8(2c)+4c = 20c \overset{!}{=} 20.$$

Also ist $c=1$ und $d=2$ . Mit $y = y_{\text{hom}} + y_p$ ergibt sich die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu

$$y(x) = c_1\,e^x + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x) + 2x\cos(2x) + x\sin(2x)\,, \text{ mit } c_{1,2,3} \in \mathbb{R}.$$

**Alternativ:**

**(d)** Bei der Art der rechten Seite handelt es sich um Resonanz. Außerdem nutzen wir $\cos(2x) = \mathcal{R}\text{e}\; e^{2ix}$. Für die partikuläre Lösung setzen wir deshalb an:

$$\tilde{y}_p(x) = ax\,e^{2ix} \quad (\text{ mit } a \in \mathbb{C}).$$

Damit ergeben sich die benötigten Ableitungen zu

$$\begin{aligned} \tilde{y}_p'(x) &= a\,e^{2ix} + 2i\,\tilde{y}_p \\ \tilde{y}_p''(x) &= 2ia\,e^{2ix} + 2i(a\,e^{2ix} + 2i\,\tilde{y}_p) = 4ai\,e^{2ix} - 4\,\tilde{y}_p \\ \tilde{y}_p'''(x) &= -8a\,e^{2ix} - 4(a\,e^{2ix} + 2i\,\tilde{y}_p) = -12a\,e^{2ix} - 8i\,\tilde{y}_p \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$-12a\,e^{2ix} - 8i\,\tilde{y}_p - 4ai\,e^{2ix} + 4\,\tilde{y}_p + 4a\,e^{2ix} + 8i\,\tilde{y}_p - 4\tilde{y}_p = -20\,e^{2ix}$$

und ein Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} x^0: &\qquad -12a - 4ai + 4a = 20 \iff (2+i)a = 5 \iff a = 2-i \\ x^1: &\qquad -8ai + 4a + 8ai - 4ai = 0 \text{ (trivial erfüllt).} \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{y}_p(x) = (2-i)x\,e^{2ix}$. Da wir die reelle Lösung zum Kosinus als rechter Seite suchen, nehmen wir davon wieder den Realteil:

$$y_p(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\,\tilde{y}_p(x) = 2x\cos(2x) + x\sin(2x)\,.$$

Die allgemeine Form der Lösung der inhomogenen DGL ist mit $y = y_{\text{hom}} + y_p$ dann gegeben als:

$$y(x) = c_1\,e^x + c_2\cos(2x) + c_3\sin(2x) + 2x\cos(2x) + x\sin(2x)\,,\ \text{ mit } c_{1,2,3} \in \mathbb{R}.$$

**Aufgabe 6** (*6 Punkte*) Berechnen Sie mittels Residuensatz das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t$$

*Hinweis:* Mit $z = e^{\mathrm{i}t}$ ist $\cos t = (z + z^{-1})/2$

---

Aufgrund der Symmetrie von $\cos t$ gilt

$$\frac{\cos 3t}{5-4\cos t} = \frac{\cos(-3t)}{5-4\cos(-t)}$$

und somit (nutze $\cos 3t = (z^3 + z^{-3})/2$ für $z = e^{\mathrm{i}t}$)

$$\int_0^\pi \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-2(z+z^{-1})}\frac{-\mathrm{i}}{z}\mathrm{d}z$$
$$= \frac{-\mathrm{i}}{4}\int_{|z|=1}\frac{z^6+1}{z^3(5z-2z^2-2)}\mathrm{d}z.$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\mathrm{d}t = -\mathrm{i}z^{-1}\mathrm{d}z$ ist und das Intervall $[-\pi,\pi]$ auf den Einheitskreis abgebildet wird.

Also erhalten wir das Ergebnis, wenn wir mittels Residuensatz das letzte Integral bestimmen. Nicht triviale Residuen gibt es in den Nullstellen des Nenners, also

$$z_0 = 0, \qquad z_1 = \frac{1}{2}, \qquad z_2 = 2.$$

Im Einheitskreis liegen davon $z_0$ und $z_1$ und deren Residuen sind

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^6+1}{z^3(5z-2z^2-2)},0\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z^6+1}{5z-2z^2-2}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{5z-2z^2-2}\Big|_{z=0}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{5-4z}{(5z-2z^2-2)^2}\Big|_{z=0}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{-4z(5z-2z^2-2)^2 - 2(5-4z)^2(5z-2z^2-2)}{(5z-2z^2-2)^4}\Big|_{z=0} = -\frac{21}{8}$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^6+1}{z^3(5z-2z^2-2)},\frac{1}{2}\right) = \frac{z^6+1}{z^3(5-4z)}\Big|_{z=1/2} = \frac{65}{24}$$

Schneller bekommt man $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{z^6+1}{5z-2z^2-2}\Big|_{z=0}$ durch die Taylorentwicklung in $z=0$ (Koeffizient vor dem quadratischen Summand):

$$\frac{z^6+1}{5z-2z^2-2} = -\frac{1}{2}\frac{z^6+1}{1-(5z/2-z^2)} = -\frac{1}{2}(z^6+1)(1+5z/2-z^2+(5z/2-z^2)^2+\mathcal{O}(z^3))$$
$$= -\frac{1}{2}(1+5z/2+21z^2/4+\mathcal{O}(z^3))$$

Damit gilt

$$\int_0^\pi \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{i}}{4}\int_{|z|=1} \frac{3z^2+1/3}{z(5z-2z^2-2)}\mathrm{d}z = \frac{-\mathrm{i}}{4}2\pi\mathrm{i}\left(\frac{65}{24}-\frac{21}{8}\right) = \frac{\pi}{24}.$$

*Bemerkung:* Alternativ kann man auch die Umformung

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos^3 t - 3\cos t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t$$

und Satz 35.6.27 aus dem Skript benutzen. Außerdem kann man nutzen, dass

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3t}{5-4\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{3\mathrm{i}t}}{5-4\cos t}\mathrm{d}t$$

gilt, damit wird die Berechnung der Residuen einfacher.

**Aufgabe 7** (*13 Punkte*) Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_t + u = u_{xx}, \qquad\qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Bestimmen Sie

a. mit dem Ansatz $u(t,x) = f(t)g(x)$ gewöhnliche Differentialgleichungen für $f$ und $g$,

b. die allgemeine Lösung $g$, die die Randbedingungen erfüllt,

c. die allgemeine Lösung $f$,

d. die formale allgemeine Lösung $u$,

e. diejenige Lösung mit $u(0,x) = \cos(2x) + 4\cos(6x)$.

---

a. Der Ansatz $u(t,x) = f(t)g(x)$ in die Differentialgleichungen eingesetzt liefert

$$f'g + fg = fg''$$

mit den Randbedingungen $f(t)g'(0) = f(t)g'(\pi) = 0$, also falls wir nicht gerade die Nulllösung betrachten $g'(0) = g'(\pi) = 0$. Wenn $u$ nicht die Nulllösung ist, können wir durch $u$ dividieren (in allen Punkten $(t,x)$, in denen $u$ nicht verschwindet) und erhalten

$$\frac{f'(t)}{f(t)} + 1 = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

Dies kann nur erfüllt werden, falls $\frac{g''(x)}{g(x)} = C = \frac{f'(t)}{f(t)} + 1$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Damit erhalten wir die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$f' = (C-1)f \qquad\qquad g'' = Cg.$$

b. Wir betrachten die Differentialgleichung $g'' = Cg$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - C = 0$. Wir unterscheiden die Fälle $C = 0, l^2 = C > 0$ und $-k^2 = C < 0$.

$C = 0$**:** In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch $g(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Randbedingungen liefern

$$g'(0) = a = g'(\pi) = 0.$$

Also bekommen wir nicht triviale Lösungen für $g(x) = b$, einer reellen Konstanten.

$C > 0$**:** In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch $g(x) = ae^{lx} + be^{-lx}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $l = \sqrt{C}$. Die Randbedingungen liefern

$$g'(0) = l(a-b) = g'(\pi) = l(ae^{l\pi} - be^{-l\pi}) = 0.$$

Dies ist nur erfüllt für $a = b$ und für $a \neq 0$, falls $e^{l\pi} - e^{-l\pi} = 0$. Das ist aber ein Widerspruch, denn die Exponentialfunktion ist injektiv auf $\mathbb{R}$ und $l > 0$. Also gibt es keine nicht triviale Lösung, die die Randbedingungen erfüllt.

$C < 0$**:** In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch $g(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx) = \tilde{a}e^{ikx} + \tilde{b}e^{-ikx}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (bzw. $\tilde{a} = \bar{\tilde{b}} \in \mathbb{C}$) und $k = \sqrt{|C|} = \sqrt{-C}$. Die Randbedingungen lierfern

$$g'(0) = k(-a\sin(0) + b\cos(0)) = g'(\pi) = k(-a\sin(k\pi) + b\cos(k\pi)) = 0.$$

Damit muss $b = 0$ und $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ (oder $k \in \mathbb{N}$ genügt ebenfalls) gelten, $a$ ist beliebig. Also gibt es solche Lösungen nur für $C = -k^2$ und $b = 0$. $a$ ist eine beliebige reelle Konstante.

c. Die allgemeine Lösung von $f' = (C-1)f$ ist gegeben durch

$$f(t) = ce^{(C-1)t}$$

für $c \in \mathbb{R}$.

d. Damit haben wir für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine Lösung $u_k$ des Randwertproblems durch

$$u_k(t, x) = f_k(t)g_k(x) = c_k a_k e^{-(k^2+1)t}\cos(kx) = d_k e^{-(k^2+1)t}\cos(kx)$$

gefunden. Beachte, dass der Fall $k = 0$ dazugehört, weil für $C = 0$ eine nicht triviale Lösung hinzukam.

Die formale allgemeine Lösung $u$ ist nach Superpositionsprinzip eine Summe der Lösungen, welche die Randbedingungen erfüllen. Also bekommen wir

$$u(t, x) = \sum_{k \geq 0} d_k e^{-(k^2+1)t}\cos(kx)$$

Alternativ geht auch $k \in \mathbb{Z}$. Man bekommt damit zu $k$ und $-k$ dieselbe Lösung, welche man nicht zweimal addieren muss.

e. Die Lösung mit der Anfangsbedingung $u(0, x) = \cos(2x) + 4\cos(6x)$ bekommen wir durch Koeffizientenvergleich:

$$u(0, x) = \sum_{k \geq 0} d_k \cos(kx) \overset{!}{=} \cos(2x) + 4\cos(6x),$$

also

$$d_2 = 1, \qquad d_6 = 4, \qquad d_k = 0 \text{ sonst}$$

bzw.

$$u(t, x) = e^{-5t}\cos(2x) + 4e^{-37t}\cos(6x).$$

**Aufgabe 8** (*4 Punkte*) Sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\mathcal{D}$ der Raum aller $C^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.

a. Wie ist die Distribution $\Lambda_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ erklärt?

b. Wie ist die Ableitung $(\Lambda_f)'$ von $\Lambda_f$ im Distributionensinn erklärt?

c. Zeigen Sie: Ist $f$ stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$.

---

a. Die Distribution $\Lambda_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch die Vorschrift

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}$.

b. Die Ableitung $(\Lambda_f)'$ von $\Lambda_f$ im Distributionensinn ist definiert durch

$$(\Lambda_f)'(\varphi) = \Lambda_f(-\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\varphi'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

für $\varphi \in \mathcal{D}$.

c. Sei $f$ stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(\Lambda_f)'(\varphi) = \Lambda_f(-\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\varphi'(\lambda)\mathrm{d}\lambda \overset{\text{part. Int. für } f\in C^1(\mathbb{R})}{=} -f(\lambda)\varphi(\lambda)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$\overset{\operatorname{supp}\varphi \text{ kompakt}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \overset{f' \text{ stetig}}{=} \Lambda_{f'}(\varphi)$$

Somit gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$ im Sinne der distributionellen Ableitung.