Höhere Mathematik 3
für phys, kyb, mech
Zweite Modulprüfung
Ws 2019/20
20.08.2020

- Es gibt 8 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 60. Zum Bestehen der Klausur sind 24 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Alle Schritte sind zu begründen. Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Ihren Studiengang ein.

Name	M-Nr	Studiengang

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ

⟨11⟩ **Aufgabe 1**

Die 2π-periodische Funktion f ist auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

a. Skizzieren Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x + \pi/2)$ auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.

b. Zeigen Sie, dass g gerade ist.

c. Entwickeln Sie g in seine reelle Fourierreihe.

d. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = (-\mathrm{i})^n \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

e. Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von f.

⟨5⟩ **Aufgabe 2**

a. Skizzieren Sie die Menge

$$B = \left\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

b. Sei S der Graph der Funktion $\varphi\colon B \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = y^2$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \int_S y\,\mathrm{d}O.$$

⟨5⟩ **Aufgabe 3**

Sei $b > 0$. Die Halbkugel

$$K = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2 \wedge z \geqslant 0\right\}$$

bestehe aus einem Material der Dichte $\rho(x, y, z) = \mu z$, wobei $\mu > 0$.

a. Parametrisieren Sie K durch Kugelkoordinaten.

b. Bestimmen Sie die Masse von K, also $m = \int_K \rho\,\mathrm{d}V$.

c. Bestimmen Sie die z-Koordinate des Schwerpunkts von K, also $\frac{1}{m}\int_K z\rho\,\mathrm{d}V$.

⟨7⟩ **Aufgabe 4**

Bestimmen Sie zu dem Vektorfeld

$$V\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad V(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y^2 z \\ 1 + \alpha xyz \\ \beta xy^2 + 3z^2 \end{pmatrix}$$

a. diejenigen Parameter α und β, für die V ein Gradientenfeld ist,

b. für diese Fälle ein Potential Φ zu V,

c. ebenfalls für diese Fälle das Kurvenintegral von V entlang der Kurve

$$\gamma\colon\ [0, 3] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t, t^2/3, t^3/3)^\top.$$

⟨11⟩ **Aufgabe 5**
Gegeben ist die skalare Differenzialgleichung

$$y'''' - 2y''' + 3y'' - 4y' + 2y = 12\cos x.$$

Bestimmen Sie
a. die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung,
b. alle Lösungen der homogenen Gleichung mit $y(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$,
c. alle beschränkten Lösungen der inhomogenen Gleichung,
d. eine periodische Lösung der inhomogenen Gleichung.

⟨6⟩ **Aufgabe 6**
Sei $a > b > 0$. Berechnen Sie mittels Residuensatz das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + b\cos t}.$$

Hinweis: Mit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ist $\cos t = (z + z^{-1})/2$.

⟨11⟩ **Aufgabe 7**
Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx} - 16u, \qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Bestimmen Sie
a. mit dem Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ gewöhnliche Differenzialgleichungen für v und w,
b. die allgemeine Lösung w, die die Randbedingungen erfüllt,
c. die allgemeine Lösung v, die für alle t beschränkt bleibt,
d. die formale allgemeine Lösung u, die für alle t beschränkt bleibt.

⟨4⟩ **Aufgabe 8**
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\mathcal{D}$ der Raum aller C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompakten Träger.
a. Wie ist die Distribution $\Lambda_f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ erklärt?
b. Wie ist die Ableitung $(\Lambda_f)'$ von Λ_f im Distributionssinn erklärt?
c. Zeigen Sie: Ist f stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$.

Höhere Mathematik 3
für el
Zweite Modulprüfung
Ws 2019/20
20.08.2020

- Es gibt 6 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht am linken Rand.
- Die Maximalpunktzahl ist 40. Zum Bestehen der Klausur sind 16 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Alle Schritte sind zu begründen. Verwenden Sie pro Aufgabe jeweils ein neues Blatt.
- Abgaben mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Tragen Sie bitte Namen, Matrikelnummer sowie Ihren Studiengang ein.

Name	M-Nr	Studiengang

1	2	3	4	5	6		Σ

⟨7⟩ **Aufgabe 1**

Die 2π-periodische Funktion f ist auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

a. Skizzieren Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x + \pi/2)$ auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.

b. Zeigen Sie, dass g gerade ist.

c. Entwickeln Sie g in seine reelle Fourierreihe.

⟨5⟩ **Aufgabe 2**

a. Skizzieren Sie die Menge

$$B = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 2 \wedge 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

b. Sei S der Graph der Funktion $\varphi\colon B \to \mathbb{R},\ \varphi(x, y) = y^2$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \int_S y \,\mathrm{d}O.$$

⟨5⟩ **Aufgabe 3**

Sei $b > 0$. Die Halbkugel

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant b^2 \wedge z \geqslant 0\}$$

bestehe aus einem Material der Dichte $\rho(x, y, z) = \mu z$, wobei $\mu > 0$.

a. Parametrisieren Sie K durch Kugelkoordinaten.

b. Bestimmen Sie die Masse von K, also $m = \int_K \rho \,\mathrm{d}V$.

c. Bestimmen Sie die z-Koordinate des Schwerpunkts von K, also $\frac{1}{m} \int_K z\rho \,\mathrm{d}V$.

⟨7⟩ **Aufgabe 4**

Bestimmen Sie zu dem Vektorfeld

$$V\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad V(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y^2 z \\ 1 + \alpha xyz \\ \beta xy^2 + 3z^2 \end{pmatrix}$$

a. diejenigen Parameter α und β, für die V ein Gradientenfeld ist,

b. für diese Fälle ein Potential Φ zu V,

c. ebenfalls für diese Fälle das Kurvenintegral von V entlang der Kurve

$$\gamma\colon\ [0, 3] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t, t^2/3, t^3/3)^\top.$$

⟨10⟩ **Aufgabe 5**
Gegeben ist die skalare Differenzialgleichung

$$y'''' - 2y''' + 3y'' - 4y' + 2y = 12\cos x.$$

Bestimmen Sie
a. die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung,
b. alle Lösungen der homogenen Gleichung mit $y(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$,
c. alle beschränkten Lösungen der inhomogenen Gleichung,

⟨6⟩ **Aufgabe 6**
Sei $a > b > 0$. Berechnen Sie mittels Residuensatz das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + b\cos t}.$$

Hinweis: Mit $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ist $\cos t = (z + z^{-1})/2$.