Aufgabe 1 (*11 (7) Punkte*) Die 2π-periodische Funktion f ist auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x + \pi/2)$$

auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$.

(b) Zeigen Sie, dass g gerade ist.

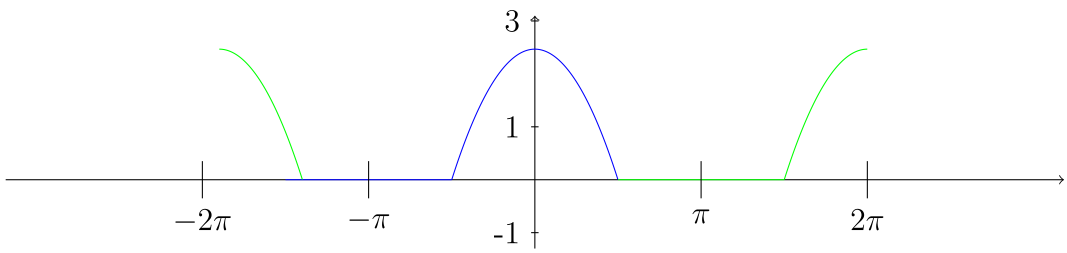
(c) Entwickeln Sie g in seine reelle Fourierreihe.

(d) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = (-\mathrm{i})^n \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

(e) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von f.

(a) Skizze:



(b) Da g 2π-periodisch ist, genügt es g auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ zu betrachten. Wir können g explizit darstellen. g ist die 2π-periodische Fortsetzung von

$$g(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\pi^2}{4} - x^2, & |x| \leqq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |x| \leqq \pi. \end{cases}$$

Diese Funktion ist gerade. Alternativ gilt für $0 \leqq x \leqq \pi$

$$g(-x) = f(\pi/2 - x) = \begin{cases} (\pi/2 - x)(\pi/2 + x), & 0 \leqq x \leqq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x \leqq \pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\pi/2 + x)(\pi/2 - x), & 0 \leqq x \leqq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x \leqq \pi \end{cases} = f(\pi/2 + x) = g(x).$$

Da f 2π-periodisch ist, ist es auch g und damit ist g eine gerade Funktion.

(c) Da g gerade ist, gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist mit obiger Darstellung

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{g \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4} - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Analog für $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \overset{g \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi/2} -2x\sin(kx)\mathrm{d}x \\
=& -\frac{2}{\pi n}\left[\frac{2x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi/2} 2\cos(nx)\mathrm{d}x \\
=& -\frac{2}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{4}{\pi n^3}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi/2} \\
=& -\frac{2}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{4}{\pi n^3}\sin(n\pi/2)
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{g \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+\pi/2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} x(\pi - x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \overset{g \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+\pi/2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\cos(nx - n\pi/2)\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} x(\pi - x)\cos(nx - n\pi/2)\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{x(\pi - x)\sin(nx - n\pi/2)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{(\pi - 2x)\sin(nx - n\pi/2)}{n}\,\mathrm{d}x \\
=& \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi - 2x)\cos(nx - n\pi/2)}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{4}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(nx - n\pi/2)}{n^2} \\
=& -\frac{2\cos(n\pi - n\pi/2)}{n^2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(nx - n\pi/2)}{n^3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{2}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{4}{\pi n^3}\sin(n\pi/2).
\end{aligned}$$

Dies kann man auch schreiben als

$$a_n = -\frac{\mathrm{i}^n}{n^2}(1 + (-1)^n) + \frac{2}{\pi n^3}\mathrm{i}^{n-1}(1 + (-1)^{n-1}) = \mathrm{i}^n\left(-\frac{1}{n^2}(1 + (-1)^n) - \frac{2}{\pi n^3}\mathrm{i}(1 + (-1)^{n-1})\right).$$

Somit ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\frac{2}{(2k)^2}\cos(k\pi) + \frac{4}{\pi(2k)^3}\sin(k\pi) = \frac{(-1)^{k+1}}{2k^2} \\ a_{2k-1} &= -\frac{2}{(2k-1)^2}\cos(k\pi - \pi/2) + \frac{4}{\pi(2k-1)^3}\sin(k\pi-\pi/2) = (-1)^{k+1}\frac{4}{\pi(2k-1)^3} \end{aligned}$$

Die zu g gehörige Fourierreihe ist also

$$\begin{aligned} g &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(nx) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{2}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{4}{\pi n^3}\sin(n\pi/2)\right)\cos(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{12} - \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{2k^2}\cos(2kx) + (-1)^k\frac{4}{\pi(2k-1)^3}\cos((2k-1)x) \\ &= \frac{\pi^2}{12} - \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{2k^2}\cos(2kx) - \sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{4}{\pi(2k-1)^3}\cos((2k-1)x). \end{aligned}$$

Alle Darstellungen sind aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen äquivalent.

(d) Eine direkte Rechnung liefert unter Ausnutzung, dass f 2π-periodisch ist,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t &\overset{s=t-\pi/2}{=} e^{-\mathrm{i}n\pi/2}\int_{-\pi}^{\pi} f(s+\pi/2)e^{-\mathrm{i}ns}\,\mathrm{d}s \\ &= (-\mathrm{i})^n \int_{-\pi}^{\pi} g(s)\cos(ns) - \mathrm{i}g(s)\sin(ns)\,\mathrm{d}s \overset{g \text{ gerade}}{=} (-\mathrm{i})^n\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\cos(ns)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(e) Nach Teil d gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{(-\mathrm{i})^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{(-\mathrm{i})^n}{2}a_n,$$

also

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\pi^2}{12}, \\ c_n &= \left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{2}{\pi n^3}\sin(n\pi/2)\right)(-\mathrm{i})^n, \\ c_{-n} &= \left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{2}{\pi n^3}\sin(n\pi/2)\right)\mathrm{i}^n, \end{aligned}$$

bzw. für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} c_{2k} &= -\frac{1}{4k^2}, \\ c_{2k-1} &= -\frac{2}{\pi(2k-1)^3}\mathrm{i}, \\ c_{-2k} &= -\frac{1}{4k^2}, \\ c_{-2k+1} &= \frac{2}{\pi(2k-1)^3}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Die komplexe Fourierreihe ist also

$$
\begin{aligned}
f &\sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{2}{\pi n^3}\sin(n\pi/2)\right)(-\mathrm{i})^n e^{\mathrm{i}nx} \\
&= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{2}{\pi n^3}\sin(n\pi/2)\right)(-\mathrm{i})^n e^{\mathrm{i}nx} \\
&\quad + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{2}{\pi n^3}\sin(n\pi/2)\right)\mathrm{i}^n e^{-\mathrm{i}nx} \\
&= \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(-\frac{1}{n^2}(1+(-1)^n) - \frac{2}{\pi n^3}\mathrm{i}(1+(-1)^{n-1})\right)e^{\mathrm{i}nx} \\
&= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} -\frac{1}{4k^2}e^{-\mathrm{i}2kx} - \frac{2}{\pi(2k-1)^3}\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}(2k-1)x}
\end{aligned}
$$

Alle Darstellungen sind aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen äquivalent.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

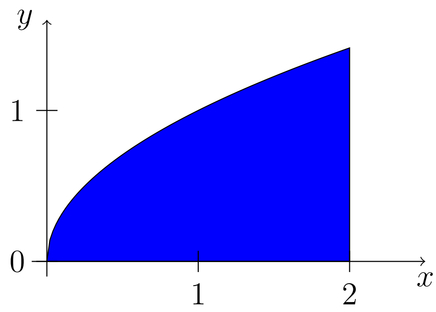
(a) Skizzieren Sie die Menge

$$B = \left\{(x,y) \ : \ 0 \leqq x \leqq 2 \wedge 0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\right\} \subsetneqq \mathbb{R}^2.$$

(b) Sei S der Graph der Funktion $\varphi : B \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = y^2$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$I = \int_S y \,\mathrm{d}O.$$

(a) Skizze:



(b)

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in B, \ z = \varphi(x,y) = y^2\right\}$$

Zur Berechnung des Oberflächenelements braucht man $\varphi_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 0$ und $\varphi_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 2y$. Das Oberflächenelement des Graphen von φ erhalten wir dann zu $\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2} = \sqrt{1+4y^2}$ (vgl. Skript). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
I &= \int_S y \,\mathrm{d}O = \int_B y\sqrt{1+4y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\sqrt{1+4y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{2} \frac{1}{12}\left[\sqrt{1+4y^2}^3\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int_{x=0}^{2} \sqrt{1+4x}^3 - 1\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{12}\left[\frac{1}{10}\sqrt{1+4x}^5 - x\right]_0^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{3^5-1}{10} - 2\right) = \frac{37}{20}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Sei $b > 0$. Die Halbkugel

$$K = \{(x, y, z) \;:\; x^2 + y^2 + z^2 \leqq b^2 \wedge z \geqq 0\}$$

bestehe aus einem Material der Dichte $\rho(x, y, z) = \mu z$, wobei $\mu > 0$ sei.

(a) Parametrisieren Sie K durch Kugelkoordinaten.

(b) Bestimmen Sie die Masse von K, also $m = \int_K \rho \,\mathrm{d}V$.

(c) Bestimmen Sie die z-Koordinate des Schwerpunkts von K, also $m^{-1} \int_K z\rho \,\mathrm{d}V$.

(a) Parametrisierung in Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

ist

$$K = \{(r, \varphi, \theta) \;:\; 0 \leqq \varphi < 2\pi,\; 0 \leqq \theta \leqq \pi/2,\; 0 \leqq r \leqq b\}.$$

Alternativ wird oft auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

und

$$K = \{(r, \varphi, \theta) \;:\; 0 \leqq \varphi < 2\pi,\; 0 \leqq \theta \leqq \pi/2,\; 0 \leqq r \leqq b\}.$$

genutzt.

(b) Die Masse m ist

$$\begin{aligned} m &= \int_K \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{b} \mu r\cos\theta r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \mu\,[\varphi]_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^b\left[\frac{-\cos^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\mu}{4}b^4 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} s_3 =& \frac{1}{m}\int_K z\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}V = \frac{1}{m}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{b} \mu r^2\cos^2\theta r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ =& \frac{\mu}{m}\,[\varphi]_0^{2\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^b\left[\frac{-\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi\mu}b^{-4}\frac{2\pi\mu}{15}b^5 = \frac{8}{15}b \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (*7 Punkte*) Gegeben ist das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y^2 z \\ 1 + \alpha xyz \\ \beta xy^2 + 3z^2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie

(a) diejenigen Parameter α und β, für die V ein Gradientenfeld ist,

(b) für diese Fälle ein Potential Φ zu V,

(c) ebenfalls für diese Fälle das Kurvenintegral von V entlang der Kurve

$$\gamma : [0,\, 3] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \left(t,\, t^2/3,\, t^3/3\right)^{\mathrm{T}}.$$

(a) Da V ein C^1-Vektorfeld ist und $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend, ist es hinreichend und notwendig, dass $\operatorname{rot} V \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^3$ gilt. Daher betrachte

$$\operatorname{rot} V(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} & - & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} & - & \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & - & \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\beta xy - \alpha xy \\ -3y^2 - \beta y^2 \\ \alpha yz + 6yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\beta - \alpha)xy \\ -(3+\beta)y^2 \\ (\alpha + 6)yz \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\operatorname{rot} V \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha = -6 \wedge \beta = -3$.

(b) Gesucht ist $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi = V$ auf $\mathbb{R}^3$. Also

$$\Phi(x,y,z) = \int \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + h_1(y,z) = \int 2x - 3y^2 z\,\mathrm{d}x + h_1(y,z) = x^2 - 3xy^2 z + h_1(y,z).$$

Also muss

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y,z) = -6xyz + \frac{\partial h_1}{\partial y}(y,z) \stackrel{!}{=} 1 - 6xyz$$

sein. Damit sollte $\frac{\partial h_1}{\partial y}(y,z) = 1$, also $h_1(y,z) = y + h_2(z)$ sein. Somit muss

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x,y,z) = -3xy^2 + \frac{\partial h_2}{\partial z}(z) \stackrel{!}{=} -3xy^2 + 3z^2$$

gelten. Also $\frac{\partial h_2}{\partial z}(z) = 3z^2$ und damit $h_2(z) = z^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Somit ist $\Phi(x,y,z) = x^2 - 3xy^2 z + y + z^3$ ($+\,c$ mit $c \in \mathbb{R}$) ein Potential zu V.

Alternative 1: Man kann ein Potential $\Phi(x,y,z) = x^2 - 3xy^2 z + y + z^3$ raten, und nachrechnen, dass es $\operatorname{grad}\Phi = V$ auf $\mathbb{R}^3$ erfüllt. Das Potential ist hier ziemlich offensichtlich.

Alternative 2: Man kann auch das Potential über ein Wegintergral bestimmen, da in Potentialfeldern Wegintergrale wegunabhängig sind. Wähle der Einfachheit halber, und weil $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$

liegt, einen Weg von $(0,0,0)$ zu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ entlang der Koordinatenachsen (zuerst von $(0,0,0)$ nach $(x,0,0)$, dann von $(x,0,0)$ nach $(x,y,0)$ und abschließend von $(x,y,0)$ nach (x,y,z)):

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) &= \int_0^x V(t,0,0)\cdot(1,0,0)^T\,\mathrm{d}t + \int_0^y V(x,t,0)\cdot(0,1,0)^T\,\mathrm{d}t + \int_0^z V(x,y,t)\cdot(0,0,1)^T\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^y 1\,\mathrm{d}t + \int_0^z -3xy^2+3t^2\,\mathrm{d}t = x^2+y-3xy^2z+z^3.\end{aligned}$$

(c) Da V für $\alpha=-6, \beta=-3$ ein Gradientenfeld ist , gilt

$$\int_\gamma V\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{s} = \Phi(\gamma(3)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(3,\,3,\,9) - \Phi(0,\,0,\,0) = 9-3\cdot3\cdot9\cdot9+3+9^3 = 12.$$

Alternativ Wegintegral ausrechnen. Für die Integration über ein Vektorfeld V entlang eines parametrisierten Wegs $\gamma:[0,3]\to\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_\gamma V\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{s} &= \int_0^3 \begin{pmatrix} 2\cdot t-(t^2)^2\cdot t^3/9 \\ 1-2\cdot t\cdot t^2\cdot t^3/3 \\ -t\cdot(t^2)^2/3+(t^3)^2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2t/3\\ t^2\end{pmatrix}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^3 2t-t^7/9+2t/3-4t^7/9-t^7/3+t^8/3\mathrm{d}t = \left[\frac{4}{3}t^2-\frac{t^8}{9}+\frac{1}{27}t^9\right]_0^3 = 12\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (*11(10) Punkte*) Gegeben ist die skalare Differenzialgleichung

$$y'''' - 2y''' + 3y'' - 4y' + 2y = 12\cos(x).$$

Bestimmen Sie

(a) die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung,

(b) alle Lösungen y der homogenen Gleichung mit $y(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$,

(c) alle beschränkten Lösungen der inhomogenen Gleichung,

(d) eine periodische Lösung der inhomogenen Gleichung.

(a) Das charakteristische Polynom der DGL lautet $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda^2+2)$. Die Faktorisierung folgt durch raten zweier Nullstellen.
Nullstellen sind damit $\lambda_{0,1} = 1, \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}\mathrm{i}$. (Somit lautet das komplexe bzw. reelle Fundamentalsystem $\mathrm{FS}_{\text{complex}} = \{e^x, xe^x, e^{\sqrt{2}\mathrm{i}x}, e^{-\sqrt{2}\mathrm{i}x}\}$ $\mathrm{FS}_{\text{real}} = \{e^x, xe^x, \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x)\}$.) Die allgemeine reelle Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{2}x\right), \text{ mit } c_{1,2,3,4} \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir fordern $y(x)\big|_{x=0} = 0$. Also

$$0 \stackrel{!}{=} c_1 + c_3,$$

womit $c_3 = -c_1$ gelten muss. Weiter ist

$$\begin{aligned}|y(x)| &= |c_1 e^x + c_2 x e^x - c_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{2}x\right)| \\ &\geqq |c_1 + c_2 x| e^x - |c_1 \cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{2}x\right)| \geqq |c_1 + c_2 x| e^x - |c_1| - |c_4|\end{aligned}$$

und somit für $x \to \infty$ nur dann beschränkt, falls $c_1 = c_2 = -c_3 = 0$ ist. Damit $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gilt, muss dann auch noch $c_4 = 0$ sein, denn der Sinus hat keinen Grenzwert für $x \to \infty$. Also erfüllt dies nur die triviale Nulllösung, $y(x) \equiv 0$.

(c) Da keine Resonanz vorliegt, ist der Ansatz

$$y_{\text{inhom}}(x) = A\cos x + B\sin x$$

sinnvoll. Damit bekommt man

$$\begin{aligned}y'_{\text{inhom}}(x) &= -A\sin x + B\cos x \\ y''_{\text{inhom}}(x) &= -A\cos x - B\sin x \\ y'''_{\text{inhom}}(x) &= A\sin x - B\cos x \\ y''''_{\text{inhom}}(x) &= A\cos x + B\sin x.\end{aligned}$$

Dies in die Gleichung eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} A\cos x + B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 3A\cos x - 3B\sin x \\ +4A\sin x - 4B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x \overset{!}{=} 12\cos x. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das System

$$\begin{aligned} A + 2B - 3A - 4B + 2A &= -2B = 12 \\ B - 2A - 3B + 4A + 2B &= 2A = 0, \end{aligned}$$

Also $A = 0$ und $B = -6$.

Alternativ: Wir nutzen $\cos(x) = \mathrm{Re}\ e^{\mathrm{i}x}$. Für die partikuläre Lösung setzen wir deshalb an:

$$\tilde{y}_p(x) = a\, e^{\mathrm{i}x}.$$

Damit ergeben sich die benötigten Ableitungen zu ($n \in \mathbb{N}$)

$$\tilde{y}_p^{(n)}(x) = a\, \mathrm{i}^n e^{\mathrm{i}x}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$(1 + 2\mathrm{i} - 3 - 4\mathrm{i} + 2)a\, e^{\mathrm{i}x} = -2\mathrm{i}a\, e^{\mathrm{i}x} = 12e^{\mathrm{i}x}$$

Also ist $a = 6\mathrm{i}$. Da $\cos(x) = \mathrm{Re}\ e^{\mathrm{i}x}$, nehmen wir davon den Realteil:

$$y_p(x) = \mathrm{Re}\ \tilde{y}_p(x) = -6\sin x.$$

Die Menge der beschränkten Lösungen der inhomogenen Gleichung ist also

$$\left\{x \mapsto y(x) = c_3\cos\left(\sqrt{2}x\right) + c_4\sin\left(\sqrt{2}x\right) - 6\sin x \ :\ c_3, c_4 \in \mathbb{R}\right\},$$

mit derselben Begründung wie in der vorigen Teilaufgabe.

(d) Eine periodische Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(x) = -6\sin x.$$

Aufgabe 6 (*6 Punkte*) Sei $a > b > 0$. Berechnen Sie mittels Residuensatz das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos t} \mathrm{d}t$$

Hinweis: Mit $z = e^{\mathrm{i}t}$ ist $\cos t = (z + z^{-1})/2$

Verwende Satz 35.6.27 für $F(x, y) = \frac{1}{a+bx}$. Da $a > b > 0$ gilt, hat F keine Pole auf dem Einheitskreis, also ist der Satz anwendbar. Sei

$$f(z) = \frac{1}{z} F((z + z^{-1})/2, -\mathrm{i}(z - z^{-1})/2) = \frac{1}{z} \frac{1}{a + b(z + z^{-1})/2} = \frac{2}{2az + bz^2 + b}$$

Die Nullstellen des Nenners sind für $b > 0$

$$z_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Interessant sind nur Polstellen von f innerhalb des Einheitskreises. Es gilt $|z_-| > \frac{a}{b} > 1$, also ist diese Polstelle nicht im relevanten Bereich $|z| < 1$. Für $|z_+|$ gilt nun

$$|z_+| = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} < 1 \quad \Leftrightarrow a - \sqrt{a^2 - b^2} < b \quad \Leftrightarrow 0 < (a - b) < \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab < a^2 - b^2 \quad \Leftrightarrow 2b^2 < 2ab \quad \Leftrightarrow b < a.$$

Also benötigen wir das Residuum an dieser Stelle.

Im Fall $a > b > 0$ sind die Nullstellen einfach, also

$$\operatorname{Res}\left(\frac{2}{2az + bz^2 + b}, \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) = \frac{2}{2a + 2bz}\Big|_{\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

Der Satz liefert dann

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos t} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \mathrm{d}t \overset{\text{Satz } 35.6.27}{=} 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}(f, z) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

für alle $a > b > 0$.

Bemerkung: Verwendet man den Satz nicht, sondern berechnet direkt, so ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos t} \mathrm{d}t = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + b(z + z^{-1})/2} \frac{-\mathrm{i}}{z} \mathrm{d}z = -\mathrm{i} \int_{|z|=1} \frac{2}{2az + bz^2 + b} \mathrm{d}z.$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\mathrm{d}t = -\mathrm{i}z^{-1}\mathrm{d}z$ ist und das Intervall $[0, 2\pi]$ auf den Einheitskreis abgebildet wird. Dann berechnet man die Residuen wie oben und verwendet den Residuensatz direkt.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + b\cos t} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{i}) \sum_{|\zeta|<1} \operatorname{Res}\left(\frac{2}{2az + bz^2 + b}, \zeta\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Aufgabe 7 (*11 Punkte*) Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_{tt} = u_{xx} - 16u, \qquad\qquad u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0.$$

Bestimmen Sie

a. mit dem Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ gewöhnliche Differentialgleichungen für v und w,

b. die allgemeine Lösung w, die die Randbedingungen erfüllt,

c. die allgemeine Lösung v, die für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt bleibt,

d. die formale allgemeine Lösung u, die für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt bleibt.

---

a. Der Ansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ in die Differentialgleichungen eingesetzt liefert

$$v''w = vw'' - 16vw$$

mit den Randbedingungen $v(t)w'(0) = v(t)w'(\pi) = 0$, also falls wir nicht gerade die Nulllösung betrachten $w'(0) = w'(\pi) = 0$. Wenn u nicht die Nulllösung ist, können wir durch u dividieren (in allen Punkten (t,x), in denen u nicht verschwindet) und erhalten

$$\frac{v''(t)}{f(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} - 16.$$

Dies kann nur erfüllt werden, falls $\frac{w''(x)}{w(x)} - 16 = C = \frac{v''(t)}{v(t)}$ für $C \in \mathbb{R}$ konstant ($C \in \mathbb{C}$ wäre auch möglich, dann muss man in Teil b anders argumentieren).

Damit erhalten wir die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$v'' = Cv \qquad\qquad w'' = (C+16)w.$$

b. Sei $\tilde{C} = C + 16$. Wir betrachten die Differentialgleichung $w'' = \tilde{C}w$. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - \tilde{C} = 0$. Wir unterscheiden die Fälle $\tilde{C} = 0, l^2 = \tilde{C} > 0$ und $-k^2 = \tilde{C} < 0$ für $l, k \in \mathbb{R}$.

$\tilde{C} = 0$**:** In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch $w(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Randbedingungen liefern

$$w'(0) = a = w'(\pi) = 0.$$

Also bekommen wir nicht triviale Lösungen für $w(x) = b$, einer reellen Konstanten.

$\tilde{C} > 0$**:** In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch $w(x) = ae^{lx} + be^{-lx}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $l = \sqrt{\tilde{C}}$. Die Randbedingungen liefern

$$w'(0) = l(a - b) = w'(\pi) = l(ae^{l\pi} - be^{-l\pi}) = 0.$$

Dies ist nur erfüllt für $a = b$ und $e^{l\pi} - e^{-l\pi} = 0$. Das ist aber ein Widerspruch, denn die Exponentialfunktion ist injektiv auf $\mathbb{R}$ und $l > 0$. Also gibt es keine solche Lösung, die die Randbedingungen erfüllt.

$\tilde{C} < 0$: In diesem Fall ist die Lösung gegeben durch $w(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx) = ce^{ikx} + \overline{c}e^{-ikx}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bzw. $c \in \mathbb{C}$ und $k = \sqrt{|\tilde{C}|} > 0$. Die Randbedingungen lierfern

$$w'(0) = k(-a\sin(0) + b\cos(0)) = w'(\pi) = kb \overset{!}{=} 0$$
$$w'(\pi) = k(-a\sin(k\pi) + b\cos(k\pi)) \overset{!}{=} 0.$$

Wegen der Randbedingung in $x = 0$ muss also $b = 0$ gelten. Dies in die Randbedingung für $x = \pi$ eingesetzt liefert nur für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ nicht triviale Lösungen. $a \in \mathbb{R}$ ist beliebig.

c. Die allgemeine Lösung von $v'' = Cv$ ist offensichtlich analog durch die drei Fälle oben charakterisiert, abhängig davon, ob $C > 0, C = 0$ oder $C < 0$ gilt. Klar ist von oben, dass nur im Fall $C \leqq 0$ die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt ist (und für $C = 0$ nur die konstante Lösung). Also ist die gesuchte allgemeine Lösung

$$v(t) = a\cos(\sqrt{|C|}t) + b\sin(\sqrt{|C|}t), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

für $C \leqq 0$.

d. Damit haben wir für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine Lösung u_k des Randwertproblems durch

$$u_k(t, x) = v_k(t)w_k(x) = \Big(a_k\cos(\sqrt{k^2 + 16}t) + b_k\sin(\sqrt{k^2 + 16}t)\Big)\cos(kx)$$

gefunden (denn es gilt $\sqrt{|C|} = \sqrt{k^2 + 16}$). Beachte, dass der Fall $k = 0$ dazugehört, weil für $\tilde{C} = 0$ eine nicht triviale Lösung hinzukam.

Die formale allgemeine Lösung u ist nach Superpositionsprinzip eine Summe der Lösungen, welche die Randbedingungen erfüllen. Also bekommen wir

$$u(t, x) = \sum_{k \geqq 0} u_k(t, x) = \sum_{k \geqq 0} \Big(a_k\cos(\sqrt{k^2 + 16}t) + b_k\sin(\sqrt{k^2 + 16}t)\Big)\cos(kx).$$

Alternativ geht auch $k \in \mathbb{Z}$. Man bekommt damit zu k und $-k$ dieselbe Lösung, welche man nicht zweimal addieren muss.

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Sie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $\mathcal{D}$ der Raum aller C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.

a. Wie ist die Distribution $\Lambda_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ erklärt?

b. Wie ist die Ableitung $(\Lambda_f)'$ von Λ_f im Distributionensinn erklärt?

c. Zeigen Sie: Ist f stetig differenzierbar, so gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$.

---

a. Die Distribution $\Lambda_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch die Vorschrift

$$\Lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}$.

b. Die Ableitung $(\Lambda_f)'$ von Λ_f im Distributionensinn ist definiert durch

$$(\Lambda_f)'(\varphi) = \Lambda_f(-\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\varphi'(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

für $\varphi \in \mathcal{D}$.

c. Sei f stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}(\Lambda_f)'(\varphi) = \Lambda_f(-\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\varphi'(\lambda)\mathrm{d}\lambda &\overset{\text{part. Int. für } f\in C^1(\mathbb{R})}{=} -f(\lambda)\varphi(\lambda)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f'(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \\ &\overset{\operatorname{supp}\varphi \text{ kompakt}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\lambda)\varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \overset{f' \text{ stetig}}{=} \Lambda_{f'}(\varphi)\end{aligned}$$

Somit gilt $(\Lambda_f)' = \Lambda_{f'}$ im Sinne der distributionellen Ableitung.