Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\; b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 02.11.2020 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **09.11.2020** bis **11.11.2020** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ und das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = -4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$. Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

Aufgabe 2 (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie jeweils den Wert der Reihe.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{3^{2n+1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n}\sqrt{n+1}}$

Aufgabe 3 (*4 Punkte*)

Wir betrachten für $z \in \mathbb{C}$ die Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n} z^{2n+1},$$
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} 3^{2n} z^{2n+3}$$

auf ihrem jeweiligen Konvergenzkreis.

(a) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $f(z)$.

(b) Finden Sie eine geschlossene Darstellung für $g(z)$.

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius ρ von $g(z)$.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)

Bei der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ betrachten wir die Partialsummen $P_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_N = 1 - \frac{1}{N+2}.$$

Aufgabe 5 (*11 Punkte*) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik $\mathcal{Q}_t$ definiert durch

$$\mathcal{Q}_t := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 - 16x_2 + t = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von $\mathcal{Q}_t$ in Abhängigkeit von t.

Aufgabe 6 (*7 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die reelle Partialbruchzerlegung von $\dfrac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x}$.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x-2}{3x^3+6x}\,\mathrm{d}\,x$.

(c) Gegeben sei $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}\colon x\mapsto \dfrac{\ln(x^3)}{\sqrt{x^3}}$. Berechnen Sie $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Aufgabe 7 (*7 Punkte*)

Für jedes $\gamma\in\mathbb{R}$ wird durch

$$g_\gamma\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4\mathrm{e}^{2x_1}-\gamma^2x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}\\(2\gamma-3)x_1\mathrm{e}^{x_1x_2}+6x_2\end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld $g_\gamma\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definiert.

(a) Für welche Parameter $\gamma\in\mathbb{R}$ besitzt g_γ ein Potential?
Geben Sie für jeden dieser Parameterwerte ein Potential an.

(b) Wir betrachten die Kurve K mit Parametrisierung $C\colon\ [0,1]\to\mathbb{R}^2\colon\ t\mapsto C(t)=\begin{pmatrix}t\\2t\end{pmatrix}$,
sowie das Vektorfeld g_1 für $\gamma=1$.
Berechnen Sie $\displaystyle\int_K g_1(x)\bullet\mathrm{d}\,x$.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto 4x^3 + 3y^2$
und die Menge $M = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x^2, -2 \leqq x \leqq 1 \right\}$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f. $\quad \operatorname{grad} f\left(\binom{x}{y}\right) =$

(b) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung kritischer Stellen von f auf M nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M.

(d) Finden Sie die Stellen, an denen f auf M ihren größten bzw. kleinsten Wert annimmt.

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ x \mapsto (1+x^2)^2 \arctan(x)$.

(a) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f.

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Stufe von f zum Entwicklungspunkt 0.

$T_2(f, x, 0) =$

(c) Bestimmen Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $T_2(f, x, 0) = T_2(g, x, 0)$ und $g(1) = 2$.

Aufgabe 10 (*4 Punkte*)
Gegeben sei für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\alpha-1)^2 \\ 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 3 & \alpha-2 \end{pmatrix}$, sowie $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des linearen Gleichungssystems $A_\alpha x = b$ für $\alpha = 0$.

$\mathcal{L} =$

(b) Bestimmen Sie die Determinante von A_α in Abhängigkeit des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\det(A_\alpha) =$

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ genau eine Lösung?

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ keine Lösung?

Aufgabe 11 (*5 Punkte*)
Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\varphi(v) := v + \left(v \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

(a) Bestimmen Sie ${}_E\big(\varphi(e_2)\big)$ und ${}_E\varphi_E$ bezüglich der Standardbasis $E : e_1, e_2, e_3$ von $\mathbb{R}^3$.

${}_E\big(\varphi(e_2)\big) =$ ${}_E\varphi_E =$

(b) Wir betrachten die Orthonormalbasis B: $b_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Matrizen ${}_E\mathrm{id}_B$, ${}_B\mathrm{id}_E$ und ${}_B\varphi_B$.

${}_E\mathrm{id}_B =$ ${}_B\mathrm{id}_E =$ ${}_B\varphi_B =$