Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei der in Kugelkoordinaten parametrisierte Körper $W := \operatorname{Im}\Phi \subseteq \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\Phi : [1,2] \times [0,2\pi] \times [0,\tfrac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^3$$
$$(r,\varphi,\vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 4xy + y^4 - z \\ x^3 - y + e^z \\ \cos x + \sin y - 4yz + z \end{pmatrix}$$

a) (*3 Punkte*) Berechnen Sie das Volumen $V(W)$.

b) (*2 Punkte*) Berechnen Sie $A(g, \partial W)$ unter Verwendung des Satzes von Gauß.

c) (*5 Punkte*) Berechnen Sie den Schwerpunkt p des Körpers W.

Hinweis: Der Schwerpunkt eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$p_K = \frac{1}{V(K)} \begin{pmatrix} \iiint_K x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \iiint_K y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ \iiint_K z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

Lösung

a)

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W 1 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -r^2\tfrac{\sqrt{2}}{2} + r^2 \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi[\tfrac{r^3}{3} - \tfrac{\sqrt{2}}{6}r^3]_1^2 \\ &= \frac{7}{3}(2-\sqrt{2})\pi. \end{aligned}$$

b) Zunächst ist $\operatorname{div} g = 1 + 4y - 1 - 4y + 1 = 1$ und damit mit dem Satz von Gauß:

$$A(g,\partial W) = \iiint_W \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = V(W) = \frac{7}{3}(2-\sqrt{2})\pi.$$

c) Aufgrund von Symmetrie erhält man für x- und y-Koordinate $p_x = p_y = 0$. Für die z-Koordinate rechnet man:

$$\begin{aligned} \iiint_W z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos(\vartheta) r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \pi \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin(2\vartheta) \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r \\ &= -\pi \int_1^2 r^3 [\tfrac{1}{2}\cos(2\vartheta)]_0^{\frac{\pi}{4}} \,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{\pi}{2} \int_1^2 r^3 \,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{15}{8}\pi \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} p_z &= \frac{1}{V(W)} \iiint_W z \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{15}{8}\pi \cdot \frac{3}{7(2-\sqrt{2})\pi} \\ &= \frac{45}{56(2-\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt ist also

$$p_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{45}{56(2-\sqrt{2})} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = -3\cos(x) + 20e^x \ .$$

Lösung

SCHRITT 1: Homogene Gleichung

Das charakteristische Polynom $P(X)$ der Differentialgleichung $y^{(4)}+3y''-4y = 0$ ist

$P(X) = X^4 + 3X^2 - 4.$
Es gilt $P(X) = (X^2 - 1)(X^2 + 4)$.

Die Nullstellen von P sind:
1, -1,
$2i$, $-2i$.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann: $f_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos(2x) + c_4\sin(2x)$, mit $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: Partikuläre Lösung

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite.

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(4)} + 3y'' - 4y = -3\cos(x) + 20e^x$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(4)} + 3y'' - 4y = -3\cos(x)$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 20e^x$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(4)} + 3y'' - 4y = -3\cos(x)$
  Weil i keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_1}(x) = acos(x) + b\sin(x).$$

  Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= -a\sin(x) + b\cos(x), \\ f''_{p_1}(x) &= -a\cos(x) - b\sin(x), \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= a\sin(x) - b\cos(x), \\ f^{(4)}_{p_1}(x) &= a\cos(x) + b\sin(x). \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man $-6a\cos(x) - 6b\sin(x) = -3\cos(x)$ und damit $a = \frac{1}{2}$ und $b = 0$. Also

$$f_{p_1}(x) = \frac{1}{2}\cos(x).$$

- Jetzt zu $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 20e^x$:
  Weil 1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_2}(x) = x^1 a e^x$$

  Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= ae^x + axe^x, \\ f''_{p_2}(x) &= 2ae^x + axe^x, \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 3ae^x + axe^x, \\ f^{(4)}_{p_2}(x) &= 4ae^x + axe^x. \end{aligned}$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$10ae^x = 20e^x$$

  und damit $a = 2$. Also

  $$f_{p_2}(x) = 2xe^x.$$

SCHRITT 3: Alle reellen Lösungen

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos(2x) + c_4\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(x) + 2xe^x \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R},$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Aus dem charakteristisches Polynom

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_3) = X^2 - 3X + 2$$

ermittelt man die Eigenwerte $1, 2$.

Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich zu jeweils

$$Av_1 = v_1 \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Av_2 = 2v_2 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die homogene Lösung ergibt sich damit als

$$f_h(x) = c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^x + c_2 e^{2x} \\ c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Inverse der Wronskimatrix des Systems berechnet sich dann als

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}, \implies W(x)^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{pmatrix}$$

Damit

$$c'(x) = W(x)^{-1} h(x) = \begin{pmatrix} 2e^x \\ -1 \end{pmatrix}$$

und integrieren liefert

$$c(x) = \begin{pmatrix} 2e^x \\ -x \end{pmatrix}$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich als

$$f_p(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} - xe^{2x} \\ 2e^{2x} - 2xe^{2x} \end{pmatrix}$$

und damit die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems als

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2e^{2x} - xe^{2x} \\ c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} + 2e^{2x} - 2xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{x}{2} \quad \text{für } x \in (0, 2\pi].$$

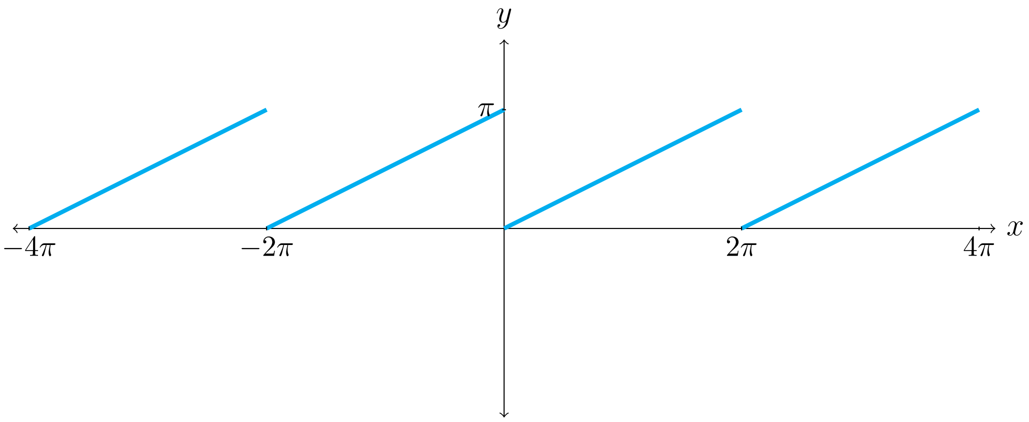
a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie den Graphen auf dem Intervall $(-4\pi, 4\pi]$;

b) (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

c) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie für alle $x \in (-4\pi, 4\pi)$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Lösung

a) Skizze:



b) Die Koeffizienten folgen durch Integration:

(1)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{4\pi^2}{4} = \pi.$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2}\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{n}\sin(nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(0 - 0 - \left[-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{2\pi}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(0 - 0 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2}\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} -\frac{1}{n}\cos(nx)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} - 0 + \left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} - 0 + 0 - 0\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{n} \\
&= -\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

(4) Die Fourierreihe von f ist

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx).$$

c) Die Funktion f ist stetig differenzierbar in den Intervallen $((2\pi n, 2\pi(n+1))$ $(n \in \mathbb{Z})$ mit endlichen links- bzw. rechtseitigen Grenzwerten sowohl für f als auch f' in allen Punkten $\{2\pi n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$. Da die Funktion f insbesondere stetig ist in $(2\pi n, 2\pi(n+1))$ $(n \in \mathbb{Z})$, konvergiert die Fourierreihe in diesem Bereich also gegen $f(x)$.

In den Punkten $x_0 \in \{-2\pi, 0, 2\pi\}$ hingegen macht f einen Sprung der Höhe π, sodass sich der Grenzwert dort berechnet als

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) + \lim_{x\to x_0-0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(0+\pi) = \frac{\pi}{2}.$$