Modulprüfung zur Höheren Mathematik 1/2

für el, kyb, mecha, phys

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 11 Aufgaben.
- Die Maximalpunktzahl ist 60.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 4 Seiten handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In den Aufgaben **A 1. - A 4.** zählen nur die Ergebnisse, welche in die entsprechenden Kästchen einzutragen sind.
- In den Aufgaben **A 5. - A 11.** zählen zusätzlich Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an (Versehen Sie jedes Blatt mir Namen und Matrikelnummer).
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- In der Vorlesung behandelte Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(x)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus.
- Viel Erfolg!

A 1. [2+2 Punkte]

(a) Stellen Sie $z = -8(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$ in der Polardarstellung $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $r \geq 0$ dar.

$$r = \boxed{}, \qquad \varphi = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{C}$ der Gleichung $w^4 = 16\,\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}}{5}}$ in der *Polardarstellung* an.

$$L = \left\{ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{} \cdot \mathrm{i}}, \ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{} \cdot \mathrm{i}}, \ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{} \cdot \mathrm{i}}, \ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{} \cdot \mathrm{i}} \right\}$$

A 2. [1+1+1 Punkte] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + \sqrt{n} - 17}{23n^2 - 2n^5 + \frac{1}{n}} = \boxed{}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n = \boxed{}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-4} - \sqrt{n^2-n+1}\right) = \boxed{}$$

A 3. [2 Punkte] Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die unten definierte Funktion f differenzierbar ist.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \geq 0 \\ \mathrm{e}^{1+x}, & x < 0 \end{cases}, \qquad \alpha = \boxed{}, \qquad \beta = \boxed{}$$

A 4. [3+2 Punkte] Es sei

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x\,(y+3)} + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}^\top$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie für f das Taylorpolynom 2. Ordnung in (h_1, h_2) im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

$$T_f^2\Big((0,0),\ (h_1,h_2)\Big) = \boxed{}\, h_1^2 + \boxed{}\, h_2^2 + \boxed{}\, h_1\, h_2 + \boxed{}\, h_1 + \boxed{}\, h_2 + \boxed{}$$

A 5. [3 Punkte] Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $8^n + 13$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist.

A 6. [2+2 Punkte] Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+2n+1}}$

A 7. [2+2+4 Punkte] Berechnen Sie die unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \sin(\pi x)\mathrm{e}^{\cos(\pi x)}\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{-3x^2+4x}{(1+x^2)(1-2x)}\mathrm{d}x$

A 8. [2+3+5 Punkte]

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(c) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

A 9. [1+9 Punkte] Wir betrachten

$$f(x,y) = x^2 + 6x + 2(y-1)\mathrm{e}^y, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Begründen Sie, warum die Funktion f ein globales Maximum und ein Minimum auf der Menge

$$D = \{(x,y) \in R^2 \mid (x+3)^2 + y^2 = 9\}.$$

besitzt.

(b) Bestimmen Sie Wert und Position dieser globalen Extrema von f auf D mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

A 10. [2+3 Punkte] Gegeben ist das vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld $v_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + \lambda xy - yz \\ 2x^2 - xz \\ 6z - xy \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz $\nabla \cdot v_\lambda$ und die Rotation $\nabla \times v_\lambda$ des Vektorfeldes v_λ.

(b) Bestimmen Sie alle Parameter λ, für die v_λ ein Potential besitzt und geben Sie zu jedem ein zugehöriges Potential an.

A 11. [3+3 Punkte] Die Zykloide C wird durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - a\sin(t) \\ a - a\cos(t) \end{pmatrix}$$

und $a > 0$ parametrisiert.

(a) Ermitteln Sie die Länge der Zykloide C. **Hinweis:** Es gilt $\sqrt{2 - 2\cos(t)} = 2\sin(\frac{t}{2})$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_C x \,\mathrm{d}x + y \,\mathrm{d}y$$

entlang der Zykloide C.