Modulprüfung zur Höheren Mathematik 1/2
für el, kyb, mecha, phys

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 11 Aufgaben.
- Die Maximalpunktzahl ist 60.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 4 Seiten handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In den Aufgaben **A 1. - A 4.** zählen nur die Ergebnisse, welche in die entsprechenden Kästchen einzutragen sind.
- In den Aufgaben **A 5. - A 11.** zählen zusätzlich Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an (Versehen Sie jedes Blatt mir Namen und Matrikelnummer).
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- In der Vorlesung behandelte Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(x)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus.
- Viel Erfolg!

A 1. [2+2 Punkte]

(a) Stellen Sie $z = -8(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$ in der Polardarstellung $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $r \geq 0$ dar.

$$r = \boxed{16}, \qquad \varphi = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{C}$ der Gleichung $w^4 = 16\,\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}}$ in der *Polardarstellung* an.

$$L = \left\{ \boxed{2} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{\frac{\pi}{5}} \cdot \mathrm{i}},\ \boxed{2} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{\frac{7\pi}{10}} \cdot \mathrm{i}},\ \boxed{2} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{\frac{6\pi}{5}} \cdot \mathrm{i}},\ \boxed{2} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{\frac{17\pi}{10}} \cdot \mathrm{i}} \right\}$$

A 2. [1+1+1 Punkte] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + \sqrt{n} - 17}{23n^2 - 2n^5 + \frac{1}{n}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n = \boxed{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n-4} - \sqrt{n^2-n+1}\right) = \boxed{\frac{3}{2}}$$

A 3. [2 Punkte] Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die unten definierte Funktion f differenzierbar ist.

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \geq 0 \\ \mathrm{e}^{1+x}, & x < 0 \end{cases}, \qquad \alpha = \boxed{\mathrm{e}}, \qquad \beta = \boxed{\mathrm{e}}$$

A 4. [3+2 Punkte] Es sei

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x\,(y+3)} + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(y+3)\,\mathrm{e}^{x\,(y+3)}} & \boxed{x\,\mathrm{e}^{x\,(y+3)} + 2y} \end{pmatrix}^{\top}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(y+3)^2\,\mathrm{e}^{x\,(y+3)}} & \boxed{(yx+3x+1)\,\mathrm{e}^{x\,(y+3)}} \\ \boxed{(yx+3x+1)\,\mathrm{e}^{x\,(y+3)}} & \boxed{x^2\,\mathrm{e}^{x\,(y+3)} + 2} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie für f das Taylorpolynom 2. Ordnung in (h_1, h_2) im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

$$T_f^2\Big((0,0),\ (h_1,h_2)\Big) = \boxed{\frac{9}{2}}\, h_1^2 + \boxed{1}\, h_2^2 + \boxed{1}\, h_1\,h_2 + \boxed{3}\, h_1 + \boxed{0}\, h_2 + \boxed{1}$$

A 5. [3 Punkte] Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $8^n + 13$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist.

Lösung: Für den Induktionsanfang betrachten wir $n = 1$. Hier gilt $8^1 + 13 = 21$, was durch 7 teilbar ist .

Sei jetzt n beliebig, so dass $8^n + 13 = k \cdot 7$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$8^{n+1} + 13 = 8^n + 13 + 7 \cdot 8^n = (k + 8^n) \cdot 7.$$

Also ist auch $8^{n+1} + 13$ durch 7 teilbar. Es folgt, dass $8^n + 13$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar ist.

A 6. [2+2 Punkte] Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-k}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 2n + 1}}$

Lösung: **(a)** Wir benutzen das Wurzelkriterium um diese Reihe zu untersuchen. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 e^{-n}} = e^{-1} < 1.$$

Demnach ist die Reihe konvergent.
(b) Für konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ muss $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge sein. . Hier gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 + 2n + 1}} = 1.$$

Demnach konvergiert die Reihe nicht.

A 7. [2+2+4 Punkte] Berechnen Sie die unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \sin(\pi x)\mathrm{e}^{\cos(\pi x)}\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{-3x^2 + 4x}{(1 + x^2)(1 - 2x)}\mathrm{d}x$

Lösung:

(a) Wir substituieren $\cos(\pi x) = u$. Es gilt

$$\int \sin(\pi x)\mathrm{e}^{\cos(\pi x)}\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^u \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{\pi}e^u\right] = \left[-\frac{1}{\pi}e^{\cos \pi x}\right].$$

(b) Wir multiplizieren mit 1 und integrieren partiell . Es gilt

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = [x \arctan x] - \int \frac{x}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\right].$$

(c) Wir führen zunächst eine Partialvruchzerlegung durch. Wir suchen $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{-3x^2+4x}{(1+x^2)(1-2x)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1-2x}.$$

Wir erhalten

$$A = 2, \quad B = -1 \quad \text{und} \quad C = 1.$$

Damit folgt

$$\int \frac{-3x^2+4x}{(1+x^2)(1-2x)}\mathrm{d}x = \int \frac{2x-1}{1+x^2} + \frac{1}{1-2x}\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x^2) - \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|1-2x|\right].$$

A 8. [2+3+5 Punkte]

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(c) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\frac{7}{5}-\lambda & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \frac{6}{5} & 0 & \frac{2}{5}-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)\left(\left(-\frac{7}{5}-\lambda\right)\left(\frac{2}{5}-\lambda\right) - \frac{36}{25}\right) \\ &= (3-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda-2\right) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6. \end{aligned}$$

(b) Einen Eigenwert $\lambda_1 = 3$ können wir gleich ablesen . Die anderen beiden sind Nullstellen des Polynoms $\lambda^2 + \lambda - 2$, also

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2} = 1 \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -2 \end{aligned}$$

(c) Einen Eigenvektor $v_1 = (0,1,0)^T$ zu $\lambda_1 = 3$ können wir gleich ablesen . Für Eigenvektoren $v_2 = (x,y,z)^T$ zu $\lambda_2 = 1$ gilt

$$A\,v_2 = v_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -\tfrac{7}{5}x + \tfrac{6}{5}z &= x \\ 3y &= y \\ \tfrac{6}{5}x + \tfrac{2}{5}z &= z \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -\tfrac{12}{5}x + \tfrac{6}{5}z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ \tfrac{6}{5}x + \tfrac{-3}{5}z &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 2x \end{aligned}..$$

Wir können also z.B. $v_2 = (1,0,2)^T$ wählen . Für Eigenvektoren $v_3 = (x,y,z)^T$ zu $\lambda_3 = -2$ gilt

$$A\,v_3 = -2v_3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} -\tfrac{7}{5}x + \tfrac{6}{5}z \quad &= -2x \\ 3y \quad &= -2y \\ \tfrac{6}{5}x + \tfrac{2}{5}z \quad &= -2z \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \tfrac{3}{5}x + \tfrac{6}{5}z \quad &= 0 \\ 5y \quad &= 0 \\ \tfrac{6}{5}x + \tfrac{12}{5}z \quad &= 0 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} y \quad &= 0 \\ x \quad &= -2z \end{aligned}.$$

Wir können also z.B. $v_3 = (2,0,-1)^T$ wählen .

A 9. [1+9 Punkte] Wir betrachten

$$f(x,y) = x^2 + 6x + 2(y-1)\mathrm{e}^y, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

(a) Begründen Sie, warum die Funktion f ein globales Maximum und ein Minimum auf der Menge

$$D = \{(x,y) \in R^2 \mid (x+3)^2 + y^2 = 9\}.$$

besitzt.

(b) Bestimmen Sie Wert und Position dieser globalen Extrema von f auf D mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

Lösung:

(a) Die Menge D ist abgeschlossen und beschränkt. Also ist sie kompakt. Da f stetig und reellwertig ist, hat f ein Maximum und ein Minimum.

(b) Es sei $h(x,y) = (x+3)^2 + y^2 - 9$, dann $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\}$. Es sei nun $(x,y) \in D$ ein Extremum von f auf D. Es existiert also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \nabla f(x,y) - \lambda \nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 6 - 2\lambda(x+3) \\ 2y\,\mathrm{e}^y - 2\lambda y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} (1-\lambda)(x+3) \\ y\,(\mathrm{e}^y - \lambda) \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\lambda = 1$ oder $x = -3$ und außerdem $y(\mathrm{e}^y - \lambda) = 0$.
Fall 1 $\lambda = 1$: Dann folgt $y(\mathrm{e}^y - 1) = 0$, also $y = 0$. Da $(x,y) \in D$ folgt $9 = h(x,y) = (x+3)^2$, also $x = \pm 3 - 3$.
Fall 2 $x = -3$: Da $(x,y) \in D$ folgt $9 = h(x,y) = y^2$, also $y = \pm 3$.
Nun vergleichen wir die Funktionswerte aller Kandidaten:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= -2 \\ f(-6,0) &= 36 - 36 - 2 = -2 \\ f(-3,3) &= 9 - 18 + 2 \cdot 2\mathrm{e}^3 = -9 + 4\mathrm{e}^3 \\ f(-3,-3) &= 9 - 18 + 2 \cdot (-4)\mathrm{e}^{-3}. \end{aligned}$$

Somit

$$f(-3-3) < f(0,0) = f(-6,0) < f(-3,3)$$

Also hat f ein Maximum bei $(-3,3)$ mit $f(-3,3) = 4\mathrm{e}^3 - 9$ und ein Minium bei $(-3,-3)$ mit $f(-3,-3) = -8\mathrm{e}^{-3} - 9$.

A 10. [2+3 Punkte] Gegeben ist das vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld $v_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v_\lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + \lambda xy - yz \\ 2x^2 - xz \\ 6z - xy \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz $\nabla \cdot v_\lambda$ und die Rotation $\nabla \times v_\lambda$ des Vektorfeldes v_λ.

(b) Bestimmen Sie alle Parameter λ, für die v_λ ein Potential besitzt und geben Sie zu jedem ein zugehöriges Potential an.

Lösung: (a)

$$\operatorname{div}(v_\lambda) = 6x + \lambda y + 6$$

$$\operatorname{rot}(v_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (4-\lambda)x \end{pmatrix}$$

(b) Damit ein Potential existiert muss $\operatorname{rot}(v_\lambda) = 0$ gelten. Damit gibt es nur für $\lambda = 4$ ein Potential. Wir bestimmen das Potential, indem wir die Integrale

$$\int 3x^2 + 4xy - yz \,\mathrm{d}x$$
$$\int 2x^2 - xz \,\mathrm{d}y$$
$$\int 6z - xy \,\mathrm{d}z$$

bestimmen. Es gilt

$$\int 3x^2 + 4xy - yz \,\mathrm{d}x = x^3 + 2x^2y - xyz + c_1(y,z)$$
$$\int 2x^2 - xz \,\mathrm{d}y = 2x^2y - xyz + c_2(x,z)$$
$$\int 6z - xy \,\mathrm{d}z = 3z^2 - xyz + c_3(x,y)$$

Also ist

$$\varphi(x,y,z) = x^3 + 2x^2y - xyz + 3z^2$$

ein Potential.

A 11. [3+3 Punkte] Die Zykloide C wird durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at - a\sin(t) \\ a - a\cos(t) \end{pmatrix}$$

und $a > 0$ parametrisiert.

(a) Ermitteln Sie die Länge der Zykloide C. **Hinweis:** Es gilt $\sqrt{2-2\cos(t)} = 2\sin(\frac{t}{2})$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_C x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$$

entlang der Zykloide C.

Lösung: **(a)** Die Ableitung der Parametrisierung ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} a - a\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix}$$

Damit berechnet sich die Länge der Zykloide C durch

$$\begin{aligned} L(C) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a-a\cos t)^2) + (a\sin t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} 2a\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-4a\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 8a \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_C x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} (at - a\sin t)(a - a\cos t) + (a - a\cos t)(a\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 t - a^2 t\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}a^2t^2 - a^2 t\sin t - a^2\cos t\right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2 a^2\ . \end{aligned}$$