Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

10. März 1992

**Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I/II**

**2. Klausur**

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind alle acht Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

**Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!**

**Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!**

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Mitte April im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 27. April 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

---

### Aufgabe 1

Die Koeffizienten $a$ und $b$ der Parabel

$$p(t) := t^2 + at + b$$

sollen aus den folgenden Meßdaten näherungsweise bestimmt werden:

| $t$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(t)$ | 1 | 4 | 3 |

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Stellen Sie die Normalengleichung auf.

c) Lösen Sie das Ausgleichsproblem.

## Aufgabe 2

Die Ebenen $\epsilon_1$ und $\epsilon_2$ seien durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\epsilon_1 : \; x + z = 1, \qquad \epsilon_2 : \; -x + 2y + 3z = 3 \; .$$

a) Bestimmen Sie den Punkt $P$, welcher sowohl der $(y, z)$-Ebene als auch $\epsilon_1$ und $\epsilon_2$ angehört.

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Schnittgeraden $g := \epsilon_1 \cap \epsilon_2$ in Parameterform.

c) Wie lautet die Gleichung der Geraden $h$, die senkrecht auf $\epsilon_1$ steht und durch den Punkt $Q = (1, 6, 2)^t$ geht?

## Aufgabe 3

Für $a$, $b \in \mathbb{R}$ sei die folgende Rekursion gegeben:

$$x_0 := a \; , \quad x_1 := b \; , \quad x_n := \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad , \quad n = 2, 3, \ldots \; .$$

a) Setzt man $y_n := (x_{n-1}, x_n)^t$, dann erfüllen die Vektoren $y_n$ eine Rekursion der Form $A\, y_n = y_{n+1}$. Bestimmen Sie die Matrix $A$.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$. Bestimmen Sie eine Matrix $T$ sowie deren Inverse $T^{-1}$, für welche gilt

$$T^{-1} A T = D \qquad \text{bzw.} \qquad A = T D T^{-1} \; ,$$

wobei $D$ die Diagonalmatrix der Eigenwerte von $A$ ist.

c) Berechnen Sie $D^* := \lim_{n \to \infty} D^n$ und damit $y^* := \lim_{n \to \infty} y_n$. Welchen Grenzwert $x^*$ besitzt demnach die Folge $x_n$?

## Aufgabe 4

Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik

$$2x^2 + 2axy + 2y^2 - a^2 - 1 = 0$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Richtungen der Hauptachsen der Quadrik.

b) Bestimmen Sie den Typ der Quadrik in Abhängigkeit vom Parameter $a$.

c) Geben Sie die Normalform der Quadrik an.

**Aufgabe 5**

Berechnen Sie

a)

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ln(x)\, dx$$

b)

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$$

c)

$$\int \frac{2\sin x + \tan x}{1+\cos x}\, dx$$

**Aufgabe 6**

Gegeben sei die Funktion $f(x) := x + x^2 - xy^2 + 1$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f$.

b) Bestimmen Sie die Hessematrix $H(x, y)$ der Funktion $f$.

c) Bestimmen Sie den Charakter aller kritischen Punkte.

**Aufgabe 7**

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = 2\cos t + t^2 + 2 .$$

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $x(0) = x'(0) = 0$ erfüllt.

**Aufgabe 8**

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := (u, v) := (x^2 - y^2, 2xy) .$$

a) Berechnen Sie die Jacobimatrix $Df(x, y)$.

b) Berechnen Sie für $(x, y) \neq (0, 0)$ die Jacobimatrix der Umkehrabbildung $f^{-1}$ in Abhängigkeit von $x$ und $y$.

c) Sei $g := f \circ f$. Wie lautet die Kettenregel zur Berechnung der Jacobimatrix $Dg(x, y)$? Berechnen Sie $Dg(x, y)$.