Nachname:	Matrikelnr.:	Studiengang: ☐ wiwi ☐ winf ☐ t.o. bwl ☐ NF bau ☐ ______
Vorname:	Unterschrift:	

vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**Summe**	Korrektor

Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Modul 100050 & 581201

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den **Aufgaben 1-6** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- In den **Aufgaben 7-15** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes abgegebene Blatt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

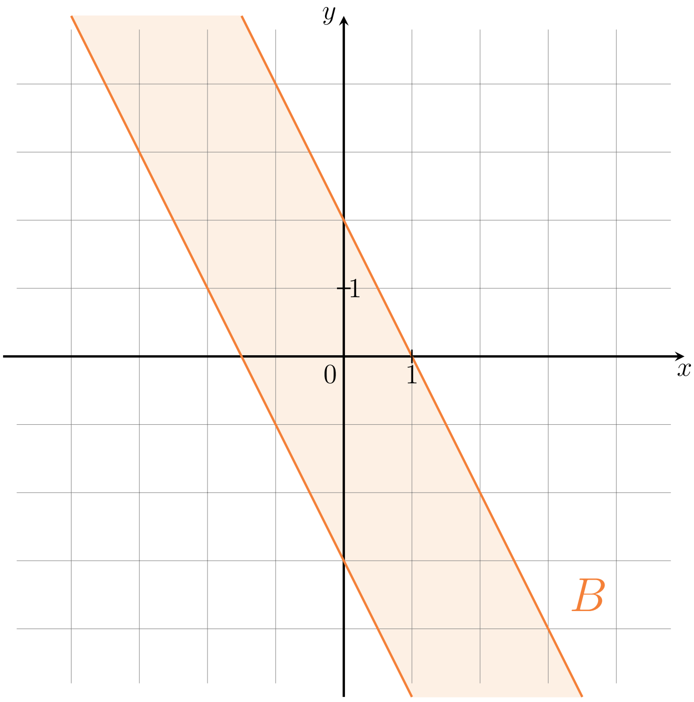
x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 30. 09. 2020 über das Campus-System der Universität Stuttgart (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:**
  Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 06.11.2020 zu erfolgen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*4 Punkte*)
Skizzieren Sie die Menge

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |2x + y + \tfrac{1}{2}| \leqq \tfrac{5}{2} \right\}.$$



Aufgabe 2 (*3 Punkte*)
Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{u} = (1, 2, 3)^\mathsf{T}$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)^\mathsf{T}$, $\mathbf{w} = (3, 0, 0)^\mathsf{T}$. Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ zwischen den Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$, das Vektorprodukt $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ und das Skalarprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{u} \rangle$:

$$\sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \boxed{\pi/4} \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}} \qquad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{u} \rangle = \boxed{0}$$

Aufgabe 3 (*1+2=3 Punkte*)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x^2 y) + e^{y^2}$.
Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \boxed{-2xy \sin(x^2 y)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \boxed{-x^2 \sin(x^2 y) + 2y e^{y^2}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)
Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung für

$$\frac{2x - 5}{x^2 + x - 2} = \boxed{\frac{3}{x + 2} - \frac{1}{x - 1}}$$

Aufgabe 5 (*2 Punkte*)
Gegeben sei die komplexe Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!}.$$

Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt z_0 sowie den Konvergenzradius ρ:

$$z_0 = \boxed{0} \qquad \rho = \boxed{+\infty}$$

Aufgabe 6 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Lösung $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichung in der Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(z-1)(1+i) = 1 - 2i.$$

$$\text{z} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}$$

Aufgabe 7 (*2+1=3 Punkte*)

Überführen Sie die folgende komplexe Zahl in Polarkoordinatendarstellung $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ und berechnen Sie den Betrag von z^3:

$$z = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^2$$

$$z = \boxed{4 \cdot (\cos(\tfrac{4\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{4\pi}{3}))} \qquad |z^3| = \boxed{64}$$

Aufgabe 8 (*2+1=3 Punkte*)
Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie das Volumen des von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ aufgespannten Spats.

(a) Wir berechnen

$$\det[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0.$$

Deshalb sind die Vektoren linear unabhängig und bilden eine Basis.

(b) Das Volumen V des von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ aufgespannten Spats ist gegeben durch

$$V = |\det[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]| = 2.$$

Aufgabe 9 (*3+2=5 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

(b) Berechnen Sie einen Eigenvektor zum größten Eigenwert.

(a) Charakteristische Polynom:

$$p_A = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

Faktorisieren des charakteristischen Polynoms nach Raten eines Eigenwertes ergibt die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 3,$$

(b) Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$:

$$\mathbf{v} = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 10 (*2+2+2+2=8 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{25n^2+4n} - 5n$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{4}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} \right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{\sin(2x)-2x}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x^2+2x}{(2x-5)^2}$

(a) Erweitern via dritter binomischer Formel und anschließendes Ausklammern der führenden Potenz liefert:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{25n^2+4n} - 5n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{25n^2+4n} - 5n \cdot \frac{\sqrt{25n^2+4n}+5n}{\sqrt{25n^2+4n}+5n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{25n^2+4n-25n^2}{\sqrt{25n^2+4n}+5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{\sqrt{25n^2+4n}+5n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{4}{\sqrt{25+4/n}+5} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

(b) Erweitern des ersten Bruches mit $\frac{x+1}{x+1}$ liefert:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \left(\frac{4}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} \right) &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{4(x+1)}{x^2-1} - \frac{8}{x^2-1} \right) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{4}{x+1} = 2
\end{aligned}$$

(c) Dreimalige Anwendung des Satzes von l'Hôpital liefert:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{\sin(2x)-2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2\cos(2x)-2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{-4\sin(2x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{-8\cos(2x)} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

(d) Ausklammern der führenden Potenz x^2 liefert:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2+2x}{(2x-5)^2} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \cdot (5+2/x)}{x^2 \cdot (2-5/x)^2} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{(5+2/x)}{(2-5/x)^2} \\
&= \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 (*2+1=3 Punkte*)

Es seien 500 Euro zu 2% Jahreszins angelegt und die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt. Es sind jährlich 10 Euro Kontoführungsgebühren fällig, die zwischen den vollen Jahren abgerechnet werden.

(a) Wie sieht die Kapitalfunktion $K(t)$ aus? Interpretieren Sie das Ergebnis.

(b) Berechnen Sie die Wachstumsrate $R_K(t)$.

(a) Die Kapitalfunktion ist

$$K(t) = 500 \cdot 1.02^t - \frac{1.02^t - 1}{1.02 - 1} \cdot 10 = 5 \cdot 1.02^t - 500 \cdot (1.02^t - 1)$$
$$= 500.$$

Die jährlichen Zinsen werden durch die jährlich fällige Kontoführungsgebühr "verbraucht".

(b) Die Wachstumsrate ist

$$R_K(t) = \frac{K'(t)}{K(t)} = 0.$$

Es findet kein Wachstum statt.

Aufgabe 12 (*2+3+3=8 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int x \cos(x) \; \mathrm{d}x$

(b) $\int \sin(x)^2 \cos(x) \; \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^\infty x e^{-2x} \; \mathrm{d}x$

(a) Partielle Integration ($u = x, v' = \cos(x)$) liefert:

$$\int x \cos(x) \; \mathrm{d}x = x \sin(x) - \int \sin(x) \; \mathrm{d}x$$
$$= x \sin(x) + \cos(x).$$

(b) Substitution von $\sin(x) = u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x)$ liefert:

$$\int \sin(x)^2 \cos(x) \; \mathrm{d}x = \int u^2 \; \mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}\sin(x)^3$$

(c) Zunächst wird die Stammfunktion durch partielle Integration bestimmt ($u = x, v' = e^{-2x}$):

$$\int x e^{-2x} \; \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} \; \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

Damit folgt (es gilt $\lim_{x \to \infty} x e^{-2x} = 0$ wie sich via Regel von l'Hôpital zeigen lässt):

$$\int_0^\infty x e^{-2x} \; \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^\infty$$
$$= -[-\frac{1}{4} e^{-2 \cdot 0}] = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 13 (*3 Punkte*)

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2+n}{5n} \right)^n$$

Anwendung des Wurzelkriteriums liefert:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \left(\frac{2+n}{5n}\right)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+n}{5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Damit konvergiert die Reihe absolut.

Aus der absoluten Konvergenz folgt auch die Konvergenz der Reihe.

Aufgabe 14 (*3+2=5 Punkte*)

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^{n-2}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(a) Es handelt sich um eine geometrische Reihe, bei welcher der erste zwei Summanden fehlen. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^{n-2}} &= 25 \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n \\ &= 25 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n - \left(-\frac{2}{5}\right)^0 - \left(-\frac{2}{5}\right)^1 \right) \\ &= 25 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n - 1 + \frac{2}{5} \right) = 25 \left(\frac{1}{1+\frac{2}{5}} - 1 + \frac{2}{5} \right) = \frac{20}{7}.\end{aligned}$$

(b) Es handelt sich *fast* um die Reihendarstellung des Sinus, es fehlt nur der erste Summand:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\left(\sin(\pi) - (-1)^1 \pi\right) = -\pi$$

Aufgabe 15 (*5 Punkte*)

Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} 2u'(t) - (u(t))^2 = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Hinweis: Sie dürfen $u(t) \neq 0$ annehmen.

Umstellen der Gleichung und Trennung der Variablen, d.h. Teilen durch $u(t)^2$ liefert

$$2u'(t) - (u(t))^2 = 0 \Leftrightarrow' (t) = u(t)^2 \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{u(t)^2} = \frac{1}{2}.$$

Integrieren beider Seiten ergibt:

$$-\frac{1}{u(t)} = t/2 + c \Leftrightarrow -\frac{1}{t/2 + c} = u(t)$$

Die Integrationskonstante c lässt sich durch die Anfangsbedingung $u(0) = -1$ bestimmen:

$$u(t) = -\frac{1}{t/2 + c} \Rightarrow u(0) = -\frac{1}{c} \stackrel{!}{=} -1 \Leftrightarrow c = 1$$

Damit lautet die finale Lösung:

$$u(t) = -\frac{1}{t/2 + 1} = -\frac{2}{t + 2}.$$