Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 7 – 10** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 19.04.2021 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **26.04.2021** bis **28.04.2021** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3^n}{7^n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9}{(2n+1)^2} \cdot \dbinom{n}{n-2}$, wobei mit dem zweiten Faktor ein Binomialkoeffizient gemeint ist

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^n \cdot n!}$

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln(2n+1) - \ln(n))$

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n^6+4n} - \sqrt{n^6+1}\right)$

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{, für } x \leqq -1 \text{ ,} \\ 2x\cos(\frac{\pi}{3}x) & \text{, für } x > -1 \text{ .} \end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie die Funktion f an der Stelle $x_0 = -1$ auf Stetigkeit.

(b) Bestimmen Sie die Ableitung von f für $x \in (-\infty, -1]$, sowie für $x \in (-1, \infty)$.

(c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ so, dass f in x stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 4 (*5 Punkte*)

(a) Die Kurve K in $\mathbb{R}^2$ sei die einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Kreislinie um den Ursprung mit Radius $\frac{5}{3}$. Berechnen Sie

$$\int_K 4 \,\mathrm{d}\, s.$$

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1 \mathrm{e}^{x_2 - x_3}$. Weiter sei die Kurve $\widetilde{K}$ parametrisiert durch

$$C\colon [-1,3] \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 3-t \end{pmatrix}. \text{ Berechnen Sie}$$

$$\int_{\widetilde{K}} \nabla f(x) \bullet \mathrm{d}\, x.$$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $F : f_1, f_2, f_3$ mit $\mathrm{L}(f_1) = \mathrm{L}(b_1)$, $\mathrm{L}(f_1, f_2) = \mathrm{L}(b_1, b_2)$ und $\mathrm{L}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{L}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Bestimmen Sie $|p - b_4|^2$ für $p = \langle f_1 \,|\, b_4 \rangle f_1 + \langle f_2 \,|\, b_4 \rangle f_2$.

Aufgabe 6 (*15 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto 21x_1^2 + 9x_2^2 - 16x_1x_2 - 5x_1 - 10x_2 \ .$$

Die Niveaumenge $\mathcal{Q}_0 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0 \right\}$, von f zum Niveau 0, enthält den Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und ist eine Ellipse.

(a) Bestimmen Sie eine euklidsche Normalform von $\mathcal{Q}_0$ und ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbb{G}$ in dem $\mathcal{Q}_0$ diese Normalform besitzt.

(b) Bestimmen Sie die Halbachsenlängen von $\mathcal{Q}_0$.

(c) Skizzieren Sie bezüglich Standardkoordinaten die Quadrik $\mathcal{Q}_0$ und das Koordinatensystem $\mathbb{G}$.

(d) Bestimmen Sie bezüglich Standardkoordinaten die Tangente an $\mathcal{Q}_0$ im Punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und zeichnen Sie diese in Ihre Skizze aus **(c)** ein.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Es sei $w = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

(a) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument von w

$$|w| = \boxed{}\ , \qquad \arg w = \boxed{} \in [0, 2\pi)\ .$$

(b) Bestimmen Sie $\arg\left(w^{77}\right) = \boxed{}$.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{i}^{25} = \boxed{}$.

(d) Geben Sie $\dfrac{w^{77}}{(8\mathrm{i})^{25}}$ in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{w^{77}}{(8\mathrm{i})^{25}} = \boxed{}$$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Für den Untervektorraum $V := \left\{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, M = M^\intercal \right\}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sind durch

$$B:\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$C:\ C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zwei Basen gegeben. Weiter sei die lineare Abbildung $\alpha\colon V \to V\colon X \mapsto A^\intercal X + XA$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Stellen Sie C_2 und $\alpha(B_2)$ als Linearkombination der Basisvektoren aus B dar.

$$C_2 = \boxed{} \cdot B_1 + \boxed{} \cdot B_2 + \boxed{} \cdot B_3$$

$$\alpha(B_2) = \boxed{} \cdot B_1 + \boxed{} \cdot B_2 + \boxed{} \cdot B_3$$

(b) Bestimmen Sie die Matrizen ${}_B\mathrm{id}_C$, ${}_B\alpha_B$ und ${}_B\alpha_C$.

$${}_B\mathrm{id}_C = \boxed{} \qquad {}_B\alpha_B = \boxed{} \qquad {}_B\alpha_C = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (*2 Punkte*)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ sei

$$T_2\left(f, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right) = 2021 + 1(x-1) + 2(x-1)^2 + 3(y-2) - 4(x-1)(y-2).$$

Geben Sie die Hessematrix von f im Punkt $\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ an und bestimmen Sie $T_1\left(f, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right)$.

$\mathrm{H}f\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) =$ $\qquad$ $T_1\left(f, \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right) =$

Aufgabe 10 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8000$ und die Menge $M = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten, die Hessematrix und das Minimum von f.

$\operatorname{grad} f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) =$ $\qquad$ $\mathrm{H}f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) =$ $\qquad$ $\min\left\{f(x) \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^2\right\} =$

(b) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung kritischer Stellen von f auf M nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f auf M.
