Modulprüfung zur Höheren Mathematik 1/2

für el, kyb, mecha, phys

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 11 Aufgaben.
- Die Maximalpunktzahl ist 60.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 4 DinA4 Seiten handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In den Aufgaben **A 1. - A 4.** zählen nur die Ergebnisse, welche in die entsprechenden Kästchen einzutragen sind.
- In den Aufgaben **A 5. - A 11.** zählen zusätzlich Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Schreiben Sie bitte Name und Matrikelnummer auf alle Blätter die Sie abgeben möchten und legen Sie diese am Ende des Bearbeitungszeitraumes in die Umschlagblätter.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(x)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus.
- Viel Erfolg!

A 1. [2+2 Punkte]

(a) Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $z = \frac{10\,\mathrm{i}-5}{3+4\,\mathrm{i}}$.

$$\operatorname{Re} z = \boxed{}\,, \qquad \operatorname{Im} z = \boxed{}$$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{C}$ der Gleichung $w^3 = 27\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\mathrm{i}}$ in der *Polardarstellung* an.

$$L = \left\{ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{}\cdot\pi\mathrm{i}},\ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{}\cdot\pi\mathrm{i}},\ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{}\cdot\pi\mathrm{i}} \right\}$$

A 2. [1+1+1 Punkte] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \cos^2(n) - 4}{2n^2 - 2\sin(n) + n^3} = \boxed{}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \boxed{}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n - 4^n} = \boxed{}$$

A 3. [3+2 Punkte] Es sei

$$f(x,y) = \sin(x + y\,x) + 2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}^\top$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie für f das Taylorpolynom 2. Ordnung in (h_1, h_2) im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

$$T_f^2\Big((0,0),\ (h_1,h_2)\Big) = \boxed{}\, h_1^2 + \boxed{}\, h_2^2 + \boxed{}\, h_1\, h_2 + \boxed{}\, h_1 + \boxed{}\, h_2 + \boxed{}$$

A 4. [1+1 Punkte] Ermitteln Sie jeweils den Konvergenzradius ρ der Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{(2n+1)3^n}} z^n, \quad \rho = \boxed{}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n, \quad \rho = \boxed{}$

A 5. [4 Punkte] Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $n^3 + 5n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

A 6. [3+2+3 Punkte] Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \tan(x)^2\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{\cos(x)\ln(\sin(x))}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

A 7. [2+3 Punkte] Gegeben seien

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\lambda & \lambda & 9 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Matrix A_λ invertierbar?

(b) Wir setzen nun $\lambda = 1$. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$A_1 x = b.$$

A 8. [2+3+5 Punkte]

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A der Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(c) Bestimmen Sie zugehörige Eigenvektoren.

A 9. [3+2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Wo ist f partiell differenzierbar? Bestimmen Sie dort die partiellen Ableitungen von f.

(b) Ist f stetig im Punkt $(0,0)$?

A 10. [4+1+5 Punkte] Wir betrachten

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + 4$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f in

$$D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\}$$

und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um lokale Maxima oder lokale Minima handelt.

(b) Begründen Sie, warum f auf

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$$

ein Maximum und ein Minimum besitzt.

(c) Bestimmen Sie Werte und Positionen der globalen Extrema von f auf D.

A 11. [3+1 Punkte] Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(y)\mathrm{e}^z \\ -x\sin(y)\mathrm{e}^z + 2 \\ x\cos(y)\mathrm{e}^z \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ein Potential für v an.[1]

(b) Es sei C die Kurve, die durch $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist. Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals 2. Art $\int_C v \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ des Vektorfeldes v entlang der Kurve C.

[1] Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass ein Potential existiert.