Modulprüfung zur Höheren Mathematik 1/2
für el, kyb, mecha, phys

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 11 Aufgaben.
- Die Maximalpunktzahl ist 60.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 4 Seiten handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In den Aufgaben **A 1. - A 4.** zählen nur die Ergebnisse, welche in die entsprechenden Kästchen einzutragen sind.
- In den Aufgaben **A 5. - A 11.** zählen zusätzlich Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an (Versehen Sie jedes Blatt mir Namen und Matrikelnummer).
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- In der Vorlesung behandelte Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(x)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus.
- Viel Erfolg!

A 1. [2+2 Punkte]

(a) Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $z = \frac{10\,\mathrm{i}-5}{3+4\,\mathrm{i}}$.

$$\operatorname{Re} z = \boxed{1}\,, \qquad \operatorname{Im} z = \boxed{2}$$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge $L \subset \mathbb{C}$ der Gleichung $w^3 = 27\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}\pi\mathrm{i}}$ in der *Polardarstellung* an.

$$L = \left\{ \boxed{3} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{\frac{5}{9}} \cdot \pi \mathrm{i}},\ \boxed{3} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{\frac{11}{9}} \cdot \pi \mathrm{i}},\ \boxed{3} \cdot \mathrm{e}^{\boxed{\frac{17}{9}} \cdot \pi \mathrm{i}} \right\}$$

A 2. [1+1+1 Punkte] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \cos^2(n) - 4}{2n^2 - 2\sin(n) + n^3} = \boxed{0}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9^n - 4^n} = \boxed{9}$$

A 3. [3+2 Punkte] Es sei

$$f(x,y) = \sin(x + y\,x) + 2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{(1+y)\,\cos(x+y\,x)} & \boxed{x\,\cos(x+y\,x)} \end{pmatrix}^\top$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \boxed{-(1+y)^2\,\sin(x+y\,x)} & \boxed{\cos(x+y\,x) - x\,(y+1)\sin(x+y\,x)} \\ \boxed{\cos(x+y\,x) - x\,(y+1)\sin(x+y\,x)} & \boxed{-x^2\,\sin(x+y\,x)} \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie für f das Taylorpolynom 2. Ordnung in (h_1, h_2) im Entwicklungspunkt $(0,0)$.

$$T_f^2\Big((0,0),\ (h_1,h_2)\Big) = \boxed{0}\,h_1^2 + \boxed{0}\,h_2^2 + \boxed{1}\,h_1\,h_2 + \boxed{1}\,h_1 + \boxed{0}\,h_2 + \boxed{2}$$

A 4. [1+1 Punkte] Ermitteln Sie jeweils den Konvergenzradius ρ der Potenzreihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{(2n+1)3^n}} z^n, \quad \rho = \boxed{\sqrt{3}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\,z^n, \quad \rho = \boxed{0}$

A 5. [4 Punkte] Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $n^3 + 5n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Lösung: Für den Induktionsanfang betrachten wir $n = 1$. Hier gilt $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$, was durch 6 teilbar ist . Sei jetzt n beliebig, so dass $n^3 + 5n = k \cdot 6$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 = 6k + 3n(n+1) + 6.$$

Da entweder n oder $n+1$ gerade ist, ist $n(n+1)$ gerade. Also ist $3n(n+1)$ durch 6 teilbar und somit auch $(n+1)^3 + 5(n+1)$. Es folgt, dass $n^3 + 5n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

A 6. [3+2+3 Punkte] Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x$ **(b)** $\displaystyle\int \tan(x)^2\,\mathrm{d}x$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{\cos(x)\ln(\sin(x))}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

Lösung: **(a)** Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch. D.h. wir suchen $A, B \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{x-3}{x(x+2)}.$$

Wir erhalten

$$A = -\frac{3}{2} \text{ und } B = \frac{5}{2}.$$

Damit folgt

$$\int \frac{x-3}{x(x+2)}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{2}\ln|x+2|\right].$$

(b) Da die Stammfunktion von $1 + \tan(x)^2$ bekannt ist, addieren wir mit 0. Es gilt

$$\int \tan(x)^2\,\mathrm{d}x = \int 1 + \tan(x)^2 - 1\,\mathrm{d}x = [\tan(x) - x].$$

(c) Wir substituieren $\ln(\sin(x)) = u$ und erhalten $\mathrm{d}u = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$. Es folgt

$$\int \frac{\cos(x)\ln(\sin(x))}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}u^2\right] = \left[\frac{1}{2}(\ln(\sin(x)))^2\right].$$

A 7. [2+3 Punkte] Gegeben seien

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2\lambda & \lambda & 9 \\ 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Matrix A_λ invertierbar?

(b) Wir setzen nun $\lambda = 1$. Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$A_1 x = b.$$

Lösung: **(a)** Die Matrix A_λ ist invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\det A_\lambda &= 2\lambda^2 + 18 - 4\lambda - 2\lambda - 36 + 2\lambda^2 \\ &= 4\lambda^2 - 6\lambda - 18.\end{aligned}$$

Die Nullstellen des Polynoms sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Also ist A_λ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 3\}$ invertierbar.

(b) Wir verwenden den 'Gaußalgorithmus' um das LGS zu lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \end{array}\right)$$

Damit erhalten wir $x_1 = -\frac{7}{10}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{2}{5}$.

A 8. [2+3+5 Punkte]

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A der Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(c) Bestimmen Sie zugehörige Eigenvektoren.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \lambda & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{7}{3} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} - \lambda \end{pmatrix} &= \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(\left(\frac{5}{3} - \lambda\right)\left(\frac{7}{3} - \lambda\right) - \frac{8}{9}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 3\right) \\ &= -\lambda^3 + \frac{11}{2}\lambda^2 - 9\lambda + \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

(b) Einen Eigenwert $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ können wir gleich ablesen . Die anderen beiden sind Nullstellen des Polynoms $\lambda^2 - 4\lambda + 3$, also

$$\lambda_2 = 2 + \sqrt{4-3} = 3$$
$$\lambda_3 = 2 - \sqrt{4-3} = 1$$

(c) Einen Eigenvektor $v_1 = (0,0,1)^T$ zu $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ können wir gleich ablesen . Für Eigenvektoren $v_2 = (x,y,z)^T$ zu $\lambda_2 = 3$ gilt:

$$A\,v_2 = 3\,v_2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \tfrac{5}{3}x + \tfrac{2\sqrt{2}}{3}y &= 3x \\ \tfrac{2\sqrt{2}}{3}x + \tfrac{7}{3}y &= 3y \\ \tfrac{3}{2}z &= 3z \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{2\sqrt{2}}{3}y &= 0 \\ \tfrac{2\sqrt{2}}{3}x - \tfrac{2}{3}y &= 0 \\ -\tfrac{3}{2}z &= 0 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} z &= 0 \\ y &= \sqrt{2}x \end{aligned}$$

Wir können also z.B. $v_2 = (1, \sqrt{2}, 0)^T$ wählen. Für Eigenvektoren $v_3 = (x,y,z)^T$ zu $\lambda_3 = 1$ gilt

$$A\,v_3 = v_3 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \tfrac{5}{3}x + \tfrac{2\sqrt{2}}{3}y &= x \\ \tfrac{2\sqrt{2}}{3}x + \tfrac{7}{3}y &= y \\ \tfrac{3}{2}z &= z \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2\sqrt{2}}{3}y &= 0 \\ \tfrac{2\sqrt{2}}{3}x + \tfrac{4}{3}y &= 0 \\ \tfrac{1}{2}z &= 0 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} z &= 0 \\ x &= -\sqrt{2}y \end{aligned}$$

Wir können also z.B. $v_3 = (\sqrt{2}, -1, 0)^T$ wählen.

A 9. [3+2 Punkte] Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Wo ist f partiell differenzierbar? Bestimmen Sie dort die partiellen Ableitungen von f.

(b) Ist f stetig im Punkt $(0,0)$?

Lösung: **(a)** Wir betrachten den Fall $(x,y) \neq (0,0)$. Es gilt

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\partial_y f(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Nun untersuchen wir den Fall $(x,y) = (0,0)$. Wir erhalten

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Demnach ist f überall partiell differenzierbar.

(b) Die Funktion f ist **nicht** stetig im Punkt $(0,0)$, denn es gilt

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

A 10. [4+1+5 Punkte] Wir betrachten

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + 4$$

für $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f in

$$D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 3\}$$

und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um lokale Maxima oder lokale Minima handelt.

(b) Begründen Sie, warum f auf

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$$

ein Maximum und ein Minimum besitzt.

(c) Bestimmen Sie Werte und Positionen der globalen Extrema von f auf D.

Lösung:

(a) Alle lokalen Extrema sind auch Nullstellen des Gradienten von f. Wir berechnen den Gradienten von f und suchen dessen Nullstellen.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -y = \frac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0$$

Wir berechnen die Hesse-Matrix von f in $(x,y) = 0$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = H_f(0,0).$$

Da $2 > 0$ und $\det H_f(0,0) = 3 > 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(0,0)$ positiv definit. Somit hat f ein lokales Minimum in $(0,0)$.

(b) Die Menge D is abgeschlossen und beschränkt. Also ist sie kompakt. Da f stetig ist, hat f ein Maximum und ein Minimum.

(c) Es sei $h(x,y) = x^2 + y^2 - 3$, dann $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x,y) = 0\}$. Es sei nun (x,y) ein globales Extremum von f auf D. Dann ist (x,y) entweder $(x,y) \in D^\circ$ und $\nabla f(x,y) = 0$, oder $(x,y) \in \partial D$ und es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \nabla f(x,y) - \lambda \nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda)x + y \\ 2(1-\lambda)y + x \end{pmatrix}.$$

.

Dabei ist $\lambda = -1$ nicht möglich, da sonst aus obigem $(x,y) = (0,0) \notin \partial D$ folgen würde. Aus $0 = \nabla f(x,y) - \lambda \nabla h(x,y)$ und $h(x,y) = 0$ folgt also

$$2(1-\lambda)x^2 = -yx = 2(1-\lambda)y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 \text{ und } 2x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x, y \in \left\{\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}.$$

.

Es bleibt alle Funktionswerte der Kandidaten zu ermitteln und zu vergleichen.

$$f(0,0) = 4$$
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{11}{2}$$
$$f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{2}.$$

Somit

$$f(0) < f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \mp\sqrt{\frac{3}{2}}\right) < f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Somit hat f globale Maxima bei $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ und $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ mit $f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{2}$ und ein globales Minimum bei $(0,0)$ mit $f(0,0) = 4$.

A 11. [3+1 Punkte] Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(y)\mathrm{e}^z \\ -x\sin(y)\mathrm{e}^z + 2 \\ x\cos(y)\mathrm{e}^z \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ein Potential für v an. Geben Sie ein Potential für v an. Sie dürfen dabei ohne Beweis annehmen, dass für v ein Potential existiert.

(b) Es sei C die Kurve, die durch $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist. Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals 2. Art $\int_C v \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ des Vektorfeldes v entlang der Kurve C.

Lösung: **(a)** Wir suchen ein Potential, d.h eine Funktion φ mit $\nabla\varphi = v$. Zunächst integrieren wir die erste Komponente von v nach x:

$$\int \cos(y)\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}x = x\cos(y)\mathrm{e}^z + c(y,z)$$

Wir bestimmen die Konstante $c(y,z)$ durch Ableiten und Gleichsetzen mit der zweiten und dritten Komponente von v:

$$\partial_y(x\cos(y)\mathrm{e}^z + c(y,z)) = -x\sin(x)e^z + \partial_y c(y,z) \overset{!}{=} -x\sin(x)e^z + 2$$

Demnach folgt $\partial_y c(y,z) = 2$, also $c(y,z) = 2y + c(z)$. Weiterhin gilt

$$\partial_z(x\cos(y)\mathrm{e}^z + 2y + c(z)) = x\cos(y)\mathrm{e}^z + \partial_y c'(z) \overset{!}{=} x\cos(y)\mathrm{e}^z$$

Es folgt $c'(z) = 0$, also $c(z) = C$. Damit ist die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, mit

$$\varphi(x, y, z) = x\cos(y)\mathrm{e}^z + 2y$$

ein Potential von v.

(b) Da in Aufgabenteil **(a)** ein Potential berechnet wurde, müssen wir nur End- und Anfangspunkt der Kurve in das Potential einsetzen und voneinander abziehen:

$$\int_C v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \varphi(\gamma(\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(\begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}) - \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = -\pi e^{\pi}$$