Nachname:	Matrikelnr.:	Studiengang: ☐ wiwi ☐ winf ☐ t.o. bwl ☐ NF bau ☐ ______
Vorname:		

vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**Summe**	Korrektor

Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Modul 100050 & 581201

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den **Aufgaben 1-6** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- In den **Aufgaben 7-15** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes abgegebene Blatt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 16. 04. 2021 über das Campus-System der Universität Stuttgart (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:**
  Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 30.04.2021 zu erfolgen.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (*1+1+2=4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := 3\sin(x) + \cos(2x - \pi)$.
Bestimmen Sie die Ableitungen

$$f'(x) = \boxed{3\cos(x) - 2\sin(2x - \pi)}$$

$$f''(x) = \boxed{-3\sin(x) - 4\cos(2x - \pi)}$$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$:

$$T_2(f, x, \pi) = \boxed{2(x - \pi)^2 - 3(x - \pi) - 1}$$

Aufgabe 2 (*2 Punkte*)
Sei für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Matrix $\boldsymbol{A}$ gegeben. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & a \end{pmatrix}, \qquad \det \boldsymbol{A} = \boxed{a(2a - 1)}.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht invertierbar? $\qquad a \in \left\{ \boxed{0, \tfrac{1}{2}} \right\}.$

Aufgabe 3 (*1+1=2 Punkte*)
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix $\boldsymbol{A}$ an: $\qquad \chi_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \boxed{\lambda^2 - 2\lambda - 5}$

(b) Berechnen Sie die beiden Eigenwerte $\lambda_1,\ \lambda_2$ von $\boldsymbol{A}$:

$$\lambda_1 = \boxed{1 - \sqrt{6}} \qquad \lambda_2 = \boxed{1 + \sqrt{6}}$$

Aufgabe 4 (*3 Punkte*)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = \sin(2xy^3) - z^2 y$.
Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \boxed{2y^3\cos(2xy^3)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \boxed{6xy^2\cos(2xy^3) - z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \boxed{-2yz}$$

Aufgabe 5 (*1+2=3 Punkte*) Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+7n+3}{(n+1)^3} = \boxed{0}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n} = \boxed{\frac{4}{3}}$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)

Berechnen Sie Entwicklungspunkt z_0 sowie Konvergenzradius ρ der folgenden komplexen Reihen:

Reihe	z_0	ρ
$\sum_{n=0}^{\infty} n!\left(z+2-\sqrt{3}i\right)^n$	$-2+\sqrt{3}i$	0
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}-1\right)^n$	2	2

Aufgabe 7 (*1+1+4=6 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto f(x,y):=\frac{1}{2}x^2+y^2-x^2y.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f(x,y)$ und klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

(a) Durch Ableiten nach x und y erhält man den Gradienten:

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} x-2xy \\ 2y-x^2 \end{pmatrix}$$

(b) Indem man den Gradienten weiter ableitet, erhält man die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 1-2y & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Zur Berechnung der kritischen Stellen muss der Gradient gleich null gesetzt werden und das resultierende Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} x-2xy \\ 2y-x^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung der zweiten Gleichung führt zu $y = \frac{1}{2}x^2$, einsetzen dieser Gleichung in die Gleichung 1 ergibt:

$$x - x^3 = x(1 - x^2) = 0$$

Somit gilt $x_1 = 0$ oder

$$1 - x^2 = 0 \qquad \text{und damit} \qquad x_{2,3} = \pm 1.$$

Insgesamt erhalten wir also die drei kritischen Stellen $P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1, \frac{1}{2}), \quad P_3 = (-1, \frac{1}{2})$.

Zur Klassifizierung der kritischen Stellen müssen diese in die Hesse-Matrix eingesetzt werden, dadurch erhält man:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad H_f(-1, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es muss noch bestimmt werden, ob diese Matrizen positiv definitiv, negativ definit oder indefinit sind. Berechnen der Determinanten liefert:

$$\det H_f(0,0) = 2, \qquad \det H_f(1, \tfrac{1}{2}) = -4, \qquad H_f(-1, \tfrac{1}{2}) = -4.$$

Damit folgt:

- $P_1 = (0,0)$ ist ein Minimum, da die Determinante positiv und der erste Matrixeintrag positiv ist.
- P_2 und P_3 sind Sattelpunkte, da die Determinanten negativ sind.

Aufgabe 8 (*2+2=4 Punkte*) Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{e^x - x - 1}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$

(a) Da Zähler und Nenner beide gegen 0 konvergieren, kann man (zweimal) den Satz von l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{e^x - x - 1} &= \lim_{x \to 0} \frac{(x \sin(x))'}{(e^x - x - 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) + x \cos(x)}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x) + x\cos(x))'}{(e^x - 1)'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos(x) - x \sin(x)}{e^x} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

(b) Es handelt sich um eine Teleskopreihe: Die Terme $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ kürzen sich weg. Daher gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & & & -\cancel{\frac{1}{4}} & & & \\ & +\frac{1}{2} & & \vdots & -\cancel{\frac{1}{5}} & & \\ & & +\frac{1}{3} & \vdots & \vdots & -\cancel{\frac{1}{6}} & \\ & & & +\cancel{\frac{1}{4}} & \vdots & \vdots & = \frac{11}{6} \end{array}$$

Aufgabe 9 (*2+2+2=6 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n}$

(a) Anwendung des Wurzelkriteriums liefert:

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)^n\left(\frac{2n^2}{n^2+1}\right)^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n^2}}=2>1.$$

Damit folgt die Divergenz der Reihe.

Die Reihe ist also weder konvergent noch absolut konvergent.

(b) Anwendung des Quotientenkriteriums liefert:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 2^n}{n^3 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3 2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

Damit folgt die absolute Konvergenz der Reihe.

Aus der absoluten Konvergenz folgt daher auch die Konvergenz.

(c) Es handelt sich um die alternierende harmonische Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

Da die Folge alternierend und streng monoton fallend ist, konvergiert die Reihe.

Da die harmonische Reihe nicht konvergiert, konvergiert die gegebene Reihe nicht absolut.

Aufgabe 10 (*3 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}\subset\mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ mit:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&-2&6\\-1&1&-3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus:

$$[A\,||\,b]=\left[\begin{array}{rrr||r}1&-1&3&2\\2&-2&6&4\\-1&1&-3&-2\end{array}\right]\begin{array}{l}\\Z_2-2Z_1\\Z_3+Z_1\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 11 (*2+3=5 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int x^2 \ln(x)\, \mathrm{d}x$ **(b)** $\int_0^1 \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\, \mathrm{d}x$

(a) Partielle Integration ($u = \ln(x),\ v' = x^2$) liefert

$$\int x^2 \ln(x)\, \mathrm{d}x = \left[\ln(x)\frac{x^3}{3}\right] - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$
$$= \left[\ln(x)\frac{x^3}{3}\right] - \frac{1}{3}\int x^2\, \mathrm{d}x = \left[\ln(x)\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9}\right].$$

(b) Substitution von $u := 2 + x^3,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ liefert

$$\int \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{3u^2}\, \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{3u}\right]$$
$$= \left[-\frac{1}{6+3x^3}\right].$$

Zum Schluss folgt mit Einsetzen der Integralgrenzen

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(2+x^3)^2}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6+3x^3}\right]_0^1 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Aufgabe 12 (*2+1=3 Punkte*)

Es seien 1000 Euro zu 10% Jahreszins angelegt und als Zeiteinheit wird 1 Jahr gewählt. Es sind jährlich 50 Euro Kontoführungsgebühren fällig, die zwischen den vollen Jahren abgerechnet werden.

(a) Wie sieht die Kapitalfunktion $K(t)$ aus? Vereinfachen Sie das Ergebnis.

(b) Berechnen Sie die Wachstumsrate $R_K(t)$.

(a) Die Kapitalfunktion ist

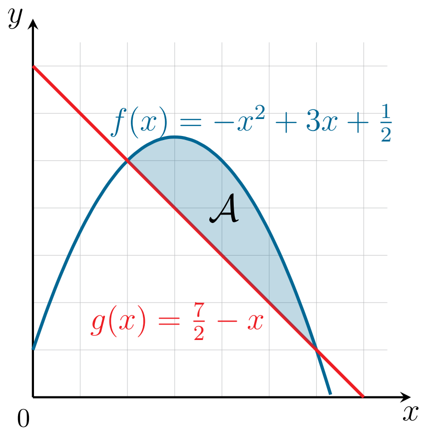
$$K(t) = 1000 \cdot 1.1^t - \frac{1.1^t - 1}{1.1 - 1} \cdot 50 = 1000 \cdot 1.1^t - \frac{1.1^t - 1}{0.1} \cdot 50$$
$$= 1000 \cdot 1.1^t - (1.1^t - 1) \cdot 500 = 500(1.1^t + 1).$$

(b) Die Wachstumsrate ist

$$R_K(t) = \frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{500\ln(1.1)1.1^t}{500(1.1^t+1)} = \ln(1.1)\frac{1.1^t}{1.1^t+1}.$$

Aufgabe 13 (*4 Punkte*)

Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ der Fläche die zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = -x^2+3x+\frac{1}{2}$ und $g(x) = \frac{7}{2} - x$ eingeschlossen ist.



Zuerst bestimmt man die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen: $f(x) = g(x) \iff -x^2+3x+\dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}-x$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Also, liegen die Schnittpunkte bei $x = 1$ und $x = 3$.

Der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ ist somit gegeben durch

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = \int_1^3 (-x^2+4x-3)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3}.$$

Aufgabe 14 (*4 Punkte*)

Für $z \in \mathbb{C}$ ist die folgende Ungleichung gegeben:

$$\frac{|z-2i|}{|z-4|} \leqq 1$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge. Geben Sie den kompletten Lösungsweg an.

Zuerst wird die Ungleichung umgeformt, so dass kein Bruch mehr in der Ungleichung steht

$$\frac{|z-2i|}{|z-4|} \leqq 1$$

$$|z-2i| \leqq |z-4|$$

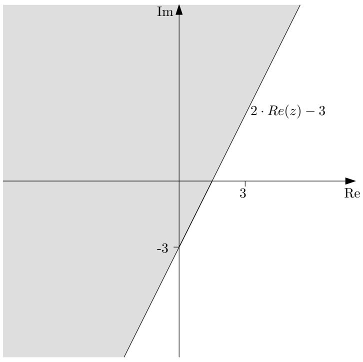
Setze $z := a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und quadriere beide Seiten

$$|a+ib-2i|^2 \leqq |a+ib-4|^2$$

$$a^2+b^2-4b+4 \leqq a^2-8a+16+b^2$$

$$
\begin{aligned}
-4b + 4 &\leqq -8a + 16 \\
-b + 1 &\leqq -2a + 4 \\
-b &\leqq -2a + 3 \\
b &\geqq 2a - 3
\end{aligned}
$$

Damit ist die Lösungsmenge $\{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid 2a - 3 \leqq b\}$. Die Lösungsmenge besteht also aus allen komplexen Zahlen oberhalb der Geraden $b(a) = 2a - 3$.



Aufgabe 15 (*7 Punkte*)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$
\begin{cases} u'(t) = 1 - (u(t))^2, \quad t > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}
$$

Hinweis: Sie dürfen $-1 < u(t) < 1$ annehmen.

Umstellen der Gleichung und Trennung der Variablen, d.h. Teilen durch $1 - (u(t))^2$ liefert

$$\frac{u'(t)}{1 - (u(t))^2} = 1.$$

Integrieren beider Seiten ergibt:

$$\int \frac{u'(t)}{1 - (u(t))^2} \, \mathrm{d}t = \int 1 \, \mathrm{d}t.$$

Die rechte Seite ist

$$\int 1 \, \mathrm{d}t = [t].$$

Die linke Seite berechnen wir mit Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{1 - u^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) \, \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{2} \ln|1 - u| + \frac{1}{2} \ln|1 + u| \right] = \left[\ln \sqrt{\left| \frac{1 + u}{1 - u} \right|} \right].$$

Da $-1 < u(t) < 1$, bekommen wir insgesamt

$$\ln \sqrt{\frac{1 + u(t)}{1 - u(t)}} = t + C. \tag{1}$$

Die Integrationskonstante C lässt sich durch die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ bestimmen

$$\ln\sqrt{\frac{1+u(0)}{1-u(0)}} = 0 + C \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

Wir lösen (1) nach u auf:

$$\ln\sqrt{\frac{1+u(t)}{1-u(t)}} = t \quad \Longleftrightarrow \quad u(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

Alternative Lösung:

Umstellen der Gleichung und Trennung der Variablen, d.h. Teilen durch $1-(u(t))^2$ liefert

$$\frac{u'(t)}{1-(u(t))^2} = 1.$$

Integrieren beider Seiten ergibt:

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{1-(u(s))^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^t 1\,\mathrm{d}s.$$

Die rechte Seite ist

$$\int_0^t 1\,\mathrm{d}s = [s]_0^t = t. \tag{2}$$

Die linke Seite berechnen wir mit Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\,\mathrm{d}u = \quad \left[-\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u|\right] = \quad \left[\ln\sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|}\right].$$

Berücksichtigen der Grenzen und $-1 < u(t) < 1$ liefert

$$\int_0^t \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right]_0^t = \ln\sqrt{\frac{1+u(t)}{1-u(t)}} - \ln\sqrt{\frac{1+u(0)}{1-u(0)}} = \ln\sqrt{\frac{1+u(t)}{1-u(t)}}.$$

Mit (2) erhalten wir

$$\ln\sqrt{\frac{1+u(t)}{1-u(t)}} = t. \tag{3}$$

Wir lösen (3) nach u auf:

$$\ln\sqrt{\frac{1+u(t)}{1-u(t)}} = t \quad \Longleftrightarrow \quad u(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$