

Nachname:	Matrikelnr.:	Studiengang: <input type="checkbox"/> wiwi <input type="checkbox"/> winf
Vorname:		<input type="checkbox"/> t.o. bwl <input type="checkbox"/> NF bau
		<input type="checkbox"/> _____

vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Summe	Korrektor

Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Modul 41990

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den **Aufgaben 1-4** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- In den **Aufgaben 5-11** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes abgegebene Blatt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 16.04.2021 über das Campus-System der Universität Stuttgart (<https://campus.uni-stuttgart.de/>) bekannt gegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:**
Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 30.04.2021 zu erfolgen.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (1+1+2=4 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 3 \sin(x) + \cos(2x - \pi)$. Bestimmen Sie die Ableitungen

$$f'(x) = 3 \cos(x) - 2 \sin(2x - \pi)$$

$$f''(x) = -3 \sin(x) - 4 \cos(2x - \pi)$$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$:

$$T_2(f, x, \pi) = 2(x - \pi)^2 - 3(x - \pi) - 1$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ die Matrix \mathbf{A} gegeben. Berechnen Sie die Determinante der Matrix \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = a(2a - 1).$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix \mathbf{A} nicht invertierbar?

$$a \in \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\}.$$

Aufgabe 3 (1+1=2 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom der Matrix \mathbf{A} an:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 5$$

(b) Berechnen Sie die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 von \mathbf{A} :

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{6} \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sin(2xy^3) - z^2y$.

Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y^3 \cos(2xy^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6xy^2 \cos(2xy^3) - z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2yz$$

Aufgabe 5 (1+1+4=6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := \frac{1}{2}x^2 + y^2 - x^2y.$$

- (a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$.
- (b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(x, y)$.
- (c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f(x, y)$ und klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).
-

- (a) Durch Ableiten nach x und y erhält man den Gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} x - 2xy \\ 2y - x^2 \end{pmatrix}$$

- (b) Indem man den Gradienten weiter ableitet, erhält man die Hesse-Matrix:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2y & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix}$$

- (c) Zur Berechnung der kritischen Stellen muss der Gradient gleich null gesetzt werden und das resultierende Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} x - 2xy \\ 2y - x^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung der zweiten Gleichung führt zu $y = \frac{1}{2}x^2$, einsetzen dieser Gleichung in die Gleichung 1 ergibt:

$$x - x^3 = x(1 - x^2) = 0$$

Somit gilt $x_1 = 0$ oder

$$1 - x^2 = 0 \quad \text{und damit} \quad x_{2,3} = \pm 1.$$

Insgesamt erhalten wir also die drei kritischen Stellen $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, \frac{1}{2})$, $P_3 = (-1, \frac{1}{2})$.

Zur Klassifizierung der kritischen Stellen müssen diese in die Hesse-Matrix eingesetzt werden, dadurch erhält man:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(-1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es muss noch bestimmt werden, ob diese Matrizen positiv definitiv, negativ definit oder indefinit sind. Berechnen der Determinanten liefert:

$$\det H_f(0,0) = 2, \quad \det H_f(1, \frac{1}{2}) = -4, \quad H_f(-1, \frac{1}{2}) = -4.$$

Damit folgt:

- $P_1 = (0,0)$ ist ein Minimum, da die Determinante positiv und der erste Matrixeintrag positiv ist.
- P_2 und P_3 sind Sattelpunkte, da die Determinanten negativ sind.

Aufgabe 6 (2+2=4 Punkte) Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{e^x - x - 1} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}$$

(a) Da Zähler und Nenner beide gegen 0 konvergieren, kann man (zweimal) den Satz von l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{e^x - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \sin(x))'}{(e^x - x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + x \cos(x)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x) + x \cos(x))'}{(e^x - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - x \sin(x)}{e^x} = \frac{2}{1} = 2 \end{aligned}$$

(b) Es handelt sich um eine Teleskopreihe: Die Terme $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ kürzen sich weg. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} &= \frac{1}{1} && -\frac{1}{4} \\ &+ \frac{1}{2} && \vdots -\frac{1}{5} \\ &+ \frac{1}{3} && \vdots \vdots -\frac{1}{6} \\ &+ \frac{1}{4} && \vdots \vdots = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (2+2=4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2}{n^2 + 1} \right)^n \qquad (b) \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$$

(a) Anwendung des Wurzelkriteriums liefert:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \left(\frac{2n^2}{n^2 + 1} \right)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2 > 1.$$

Damit folgt die Divergenz der Reihe.

Die Reihe ist also weder konvergent noch absolut konvergent.

(b) Anwendung des Quotientenkriteriums liefert:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 2^n}{n^3 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Damit folgt die absolute Konvergenz der Reihe.

Aus der absoluten Konvergenz folgt daher auch die Konvergenz.

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus:

$$[A || b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 + Z_1 \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 9 (2+3=5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int x^2 \ln(x) \, dx$

(b) $\int_0^1 \frac{x^2}{(2+x^3)^2} \, dx$

(a) Partielle Integration ($u = \ln(x)$, $v' = x^2$) liefert

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(x) \, dx &= \left[\ln(x) \frac{x^3}{3} \right] - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left[\ln(x) \frac{x^3}{3} \right] - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \left[\ln(x) \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} \right]. \end{aligned}$$

(b) Substitution von $u := 2 + x^3$, $\frac{du}{dx} = 3x^2$ liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx &= \int \frac{1}{3u^2} du = \left[-\frac{1}{3u} \right] \\ &= \left[-\frac{1}{6+3x^3} \right]. \end{aligned}$$

Zum Schluss folgt mit Einsetzen der Integralgrenzen

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(2+x^3)^2} dx = \left[-\frac{1}{6+3x^3} \right]_0^1 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

Aufgabe 10 (2+1=3 Punkte)

Es seien 1000 Euro zu 10% Jahreszins angelegt und als Zeiteinheit wird 1 Jahr gewählt. Es sind jährlich 50 Euro Kontoführungsgebühren fällig, die zwischen den vollen Jahren abgerechnet werden.

- (a) Wie sieht die Kapitalfunktion $K(t)$ aus? Vereinfachen Sie das Ergebnis.
- (b) Berechnen Sie die Wachstumsrate $R_K(t)$.

(a) Die Kapitalfunktion ist

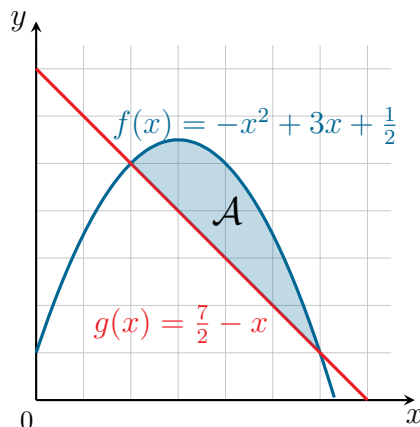
$$\begin{aligned} K(t) &= 1000 \cdot 1.1^t - \frac{1.1^t - 1}{1.1 - 1} \cdot 50 = 1000 \cdot 1.1^t - \frac{1.1^t - 1}{0.1} \cdot 50 \\ &= 1000 \cdot 1.1^t - (1.1^t - 1) \cdot 500 = 500(1.1^t + 1). \end{aligned}$$

(b) Die Wachstumsrate ist

$$R_K(t) = \frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{500 \ln(1.1) 1.1^t}{500(1.1^t + 1)} = \ln(1.1) \frac{1.1^t}{1.1^t + 1}.$$

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt \mathcal{A} der Fläche die zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = -x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ und $g(x) = \frac{7}{2} - x$ eingeschlossen ist.



Zuerst bestimmt man die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen: $f(x) = g(x) \iff -x^2 + 3x + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - x$ hat die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Also, liegen die Schnittpunkte bei $x = 1$ und $x = 3$.

Der Flächeninhalt \mathcal{A} ist somit gegeben durch

$$\mathcal{A} = \int_1^3 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}.$$