Aufgabe 1 (9 Punkte)

Seien die Pyramide $T \subseteq \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$T = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z \text{ und } x + y + 2z \le 2\Big\}, \qquad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^y + 2z \\ 3xy + z \\ x^2y - 5 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die vier Eckpunkte und das Volumen von T.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

c) (5 Punkte) Berechnen Sie den Ausfluss $A(f, \partial T)$.

Lösung

a) Mit Hilfe einer Skizze oder durch Schneiden von $x + y + 2z = 2$ mit den Koordinatenachsen ermittelt man die Eckpunkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für das Volumen ergibt sich

$$V_T = \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2) \cdot 1 = \tfrac{2}{3}.$$

b)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f &= \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3 = 3x, \\ \operatorname{rot} f &= \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ 2 - 2xy \\ 3y - e^y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A(f, \partial T) &= \iiint_T \operatorname{div} f \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}} 3x \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 3x \int_0^{2-x} [z]_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 3x \int_0^{2-x} 1 - \tfrac{x}{2} - \tfrac{y}{2} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 3x\Big[(1 - \tfrac{x}{2})y - \tfrac{1}{4}y^2\Big]_0^{2-x} \mathrm{d}x = \int_0^2 3x\Big((1 - \tfrac{x}{2})(2 - x) - \tfrac{1}{4}(2 - x)^2 - 0\Big) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 3x\Big(2 - 2x + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{1}{4}(4 - 4x + x^2)\Big) \mathrm{d}x = \int_0^2 3x(\tfrac{x^2}{4} - x + 1) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \tfrac{3}{4}x^3 - 3x^2 + 3x \,\mathrm{d}x \\ &= [\tfrac{3}{16}x^4 - x^3 + \tfrac{3}{2}x^2]_0^2 = 3 - 8 + 6 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3x} + 65\sin(2x).$$

Lösung

SCHRITT 1: Homogene Gleichung

Das charakteristische Polynom $P(X)$ der DGL $y''+2y'-3y=0$ ist $P(X)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$.
Die Nullstellen von P sind -3 und 1.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann: $f_h(x)=c_1e^x+c_2e^{-3x}$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: Partikuläre Lösung

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite.

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y''+2y'-3y = 2e^{-3x}+65\sin(2x)$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y''+2y'-3y = 2e^{-3x}$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y''+2y'-3y = \sin(2x)$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y''+2y'-3y = 2e^{-3x}$:
  Weil -3 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = cx^1e^{-3x}$$

  Zweimaliges Ableiten ergibt

  $$f'_{p_1}(x) = e^{-3x}(c-3cx),$$
  $$f''_{p_1}(x) = 3ce^{-3x}(3x-2).$$

  Setzt man dies in die DGL ein, so erhält man

  $$-4ce^{-3x} = 2e^{-3x}$$

  und damit $c=-\frac{1}{2}$. Also

  $$f_{p_2}(x) = -\frac{1}{2}xe^{-3x}.$$

- Nun zu $y'' + 2y' - 3y = 65\sin(2x)$
  Weil $2i$ keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x).$$

Zweimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_2}(x) = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x),$$
$$f''_{p_2}(x) = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x).$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man $(-7b-4a)\sin(2x)-(7a-4b)\cos(2x) = 65\sin(2x)$ und damit $a = -4$ und $b = -7$. Also

$$f_{p_1}(x) = -4\cos(2x) - 7\sin(2x).$$

SCHRITT 3: Alle reellen Lösungen

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1e^x + c_2e^{-3x} - \frac{1}{2}xe^{-3x} - 7\sin(2x) - 4\cos(2x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, \in \mathbb{R},$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay. \tag{1}$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von (1) mit $y_1(0) = v_1$ und $y_2(0) = v_2$.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x),$$

mit $h(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung

a) Wir berechnen

$$A^2 v_1 = Av_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt

$$A^2 v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_2 - v_1 = -2Av_1 - v_1.$$

Sei $f(X) = X^2 + 2X + 1$. Dann gilt also $f(A)v_2 = 0$. Mithilfe der Mitternachtsformel findet man die doppelte Nullstelle -1 von f. Die Funktionen

$$g_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad g_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}$$

bilden also ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung $f(D)y = 0$. Für die Wronskimatrix dieser zwei Funktionen berechnet man

$$M(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ -\mathrm{e}^{-x} & (1-x)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transponierte der unteren Dreiecksmatrix $M(0)$ und seine Inverse sind

$$M(0)^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left(M(0)^\top\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schlussfolgern, dass

$$y_1(x) = (v_1 \mid Av_1)\left(M(0)^\top\right)^{-1}\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ x\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \\ -2x\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Differentialgleichungsystems (1) mit $y_1(0) = v_1$ ist.

Die Ableitung

$$y_2(x) = y_1'(x) = \begin{pmatrix} (1-2x)\mathrm{e}^{-x} \\ 2(x-1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

ist eine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) mit $y_2(0) = Av_1 = v_2$.

b) Da v_1 und v_2 linear unabhängig sind, bilden y_1 und y_2 ein Fundamentalsystem von (1). Seine Wronskimatrix ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} (2x+1)\mathrm{e}^{-x} & (1-2x)\mathrm{e}^{-x} \\ -2x\mathrm{e}^{-x} & 2(x-1)\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung von $W(x)^{-1}$ benutzen wir die Beziehung $W(x)^{-1} = W(0)^{-1}W(-x)W(0)^{-1}$. Die Inverse der oberen Dreiecksmatrix

$$W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist

$$W(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$W(x)^{-1} = W(0)^{-1}W(-x)W(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1-2x)\mathrm{e}^{x} & (1+2x)\mathrm{e}^{x} \\ 2x\mathrm{e}^{x} & -2(x+1)\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-x)\mathrm{e}^{x} & \left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{e}^{x} \\ -x\mathrm{e}^{x} & -\left(\frac{1}{2}+x\right)\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten Funktionen $c_1, c_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)\mathrm{e}^{x} & \left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{e}^{x} \\ -x\mathrm{e}^{x} & -\left(\frac{1}{2}+x\right)\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -x \end{pmatrix}.$$

Durch Integration erhalten wir als eine mögliche Wahl

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{x^2}{2} \\ -\frac{x^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = W(x)\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1+x)\mathrm{e}^{-x} \\ -x^2\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$$

des inhomogenen Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \pi - x \text{ für } x \in (-\pi, \pi]$$

gegeben.

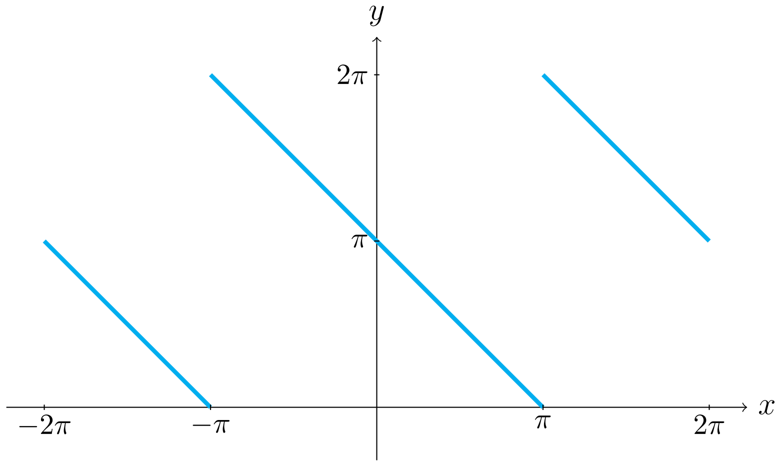
a) (2 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

c) (2 Punkts) Bestimmen Sie für alle $x \in [0, 2\pi]$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

Lösung

a) Skizze:



b) (1) Für a_0 errechnet man:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(2\pi^2) = 2\pi.$$

(2) Die Koeffizienten a_n für $n > 0$ folgen durch Integration:

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx \\ =& \left[(\pi - x)\cdot\frac{1}{n\pi}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n\pi}\sin(nx)dx = 0. \end{aligned}$$

(3) Die Koeffizienten b_n für $n > 0$ folgen durch Integration:

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx = \\ =& \left[-(\pi - x)\cdot\frac{1}{n\pi}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n\pi}\cos(nx)dx \\ =& \frac{1}{n\pi}(2\pi)(-1)^n - \left[\frac{1}{n^2\pi}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

(4) Die Fourier-Reihe von f ist

$$f(x) \sim \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).$$

c) Die Funktion f ist stetig und stückweise stetig differenzierbar mit endlichen rechts- und linksseitigen Grenzwerten für f und f' in allen Punkten von $[0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$, deshalb konvergiert die Fourier-Reihe in diesen Punkten gegen $f(x)$.

Im Punkt π macht f einen Sprung der Höhe 2π und die Fourier-Reihe konvergiert gegen das arithmetische Mittel von links- und rechtsseitigem Grenzwert. Es gilt also

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi+0} f(x) + \lim_{x\to\pi-0} f(x)\right) = \pi.$$