Modulprüfung zur Höheren Mathematik 3

für el, el-mobi

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 6 Aufgaben mit insgesamt 40 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 2 DIN A4 Seiten einseitig (oder 1 DIN A4 Seite doppelseitig) handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In allen Aufgaben zählen Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier, versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und **beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt**.
- Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Legen Sie alle Blätter, die Sie abgeben möchten, am Ende des Bearbeitungszeitraumes in das Umschlagblatt.
- Den Inhalt der folgenden Tabellen können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\|x\|$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus. Viel Erfolg bei der Prüfung!

A 1. [3+1+3 Punkte] Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine **komplexe** Lösung $y_{\mathbb{C}}$ von $y' = Ay$.

(c) Verwenden Sie **(b)**, um die zugehörige allgemeine **reelle** Lösung $y_{\mathbb{R}}$ zu bestimmen.

A 2. [1+2+1 Punkte] Wir betrachten die durch

$$u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^y \cos x$$

gegebene Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Ist u harmonisch?

(b) Wir identifizieren nun wie in der Vorlesung $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

(c) Schreiben Sie f als Funktion von z.

A 3. [5+1+3 Punkte] Betrachten Sie zu $a, b > 0$ die Menge

$$M_{a,b} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4 \right\}.$$

(a) Nutzen Sie das Vektorfeld $w(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)^T$, um mit Hilfe des Satzes von Ostrogradski-Gauss den Flächeninhalt von $M_{a,b}$ zu berechnen.

(b) Sei weiter $Z := M_{1,1} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie Z.

(c) Sei ferner das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x, y, z) = (2x, y^2, y^2)^T.$$

Berechnen Sie $\int_{\partial Z} v \cdot \mathrm{d}\vec{A}$.

A 4. [3+3+2 Punkte] Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z+2}{1+(z+2)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Polstellen von f und die zugehörigen Residuen.

(b) Gegeben seien die Wege

$$\gamma_1 : [0,1) \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = \mathrm{e}^{4\pi i t},$$
$$\gamma_2 : [0,1) \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = 4\mathrm{e}^{4\pi i t}.$$

Skizzieren Sie beide Wege und die Polstellen in ein gemeinsames Schaubild. Berechnen Sie die beiden Integrale

$$(i) \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad (ii) \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(c) Entwickeln Sie die Funktion in $z_0 = -2$ in eine Potenzreihe und geben Sie den Konvergenzradius an.

A 5. [1+4 Punkte] Gegeben seien die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le y\mathrm{e}^{-x} \le 9 \ \wedge \ 1 \le y\mathrm{e}^{x} \le 9\}$$

und die Transformation $\varphi : M \to [1,9] \times [1,9]$ mit

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{-x} \\ y\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\det(\varphi'(x,y))$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M mit Hilfe der Transformationsformel für Volumenintegrale.

A 6. [3+3+1 Punkte] Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' - \frac{2y}{1-x^2} - x - 1 = 0, \qquad -1 < x < 1.$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des zugehörigen homogenen Problems.

(b) Finden Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = \frac{1}{2}$.