Modulprüfung zur Höheren Mathematik 3

für el, el-mobi

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 6 Aufgaben mit insgesamt 40 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 2 DIN A4 Seiten einseitig (oder 1 DIN A4 Seite doppelseitig) handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In allen Aufgaben zählen Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier, versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und **beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt**.
- Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Legen Sie alle Blätter, die Sie abgeben möchten, am Ende des Bearbeitungszeitraumes in das Umschlagblatt.
- Den Inhalt der folgenden Tabellen können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus. Viel Erfolg bei der Prüfung!

A 1. [3+1+3 Punkte] Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine **komplexe** Lösung $y_{\mathbb{C}}$ von $y' = Ay$.

(c) Verwenden Sie **(b)**, um die zugehörige allgemeine **reelle** Lösung $y_{\mathbb{R}}$ zu bestimmen.

Lösung: **(a)** Das charakteristische Polynom lautet

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)^2 + 4,$$

wobei man direkt die beiden Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = 4 \pm 2\mathrm{i}$$

ablesen (oder berechnen) kann. Man bestimmt nun die Eigenvektoren v_1, v_2 mittels der beiden linearen Gleichungssysteme $Av - (4 \pm 2\mathrm{i})Iv = 0$ und erhält dabei z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die allgemeine komplexe Lösung $y_{\mathbb{C}}$ ist dann sofort gegeben durch

$$y_{\mathbb{C}}(x) = C_1 \mathrm{e}^{(4+2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{(4-2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

(c) Mit der Euler-Identität folgt daraus dann

$$\begin{aligned} y_{\mathbb{C}}(x) &= C_1 \mathrm{e}^{4x}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{4x}(\cos 2x - \mathrm{i}\sin 2x) \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= C_1 \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x - \mathrm{i}\sin 2x \end{pmatrix} \\ &= C_1 \mathrm{e}^{4x} \left(\begin{pmatrix} -\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \right) + C_2 \mathrm{e}^{4x} \left(\begin{pmatrix} -\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} - \mathrm{i} \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

und daraus die allgemeine reelle Lösung

$$y_{\mathbb{R}}(x) = c_1 \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} -\sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{4x} \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A 2. [1+2+1 Punkte] Wir betrachten die durch

$$u(x,y) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^y \cos x$$

gegebene Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Ist u harmonisch?

(b) Wir identifizieren nun wie in der Vorlesung $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

(c) Schreiben Sie f als Funktion von z.

Lösung: **(a)** Ja, denn es ist

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y - \mathrm{e}^y \cos x - \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^y \cos x = 0.$$

(b) Bezüglich u muss v die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen erfüllen, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_y v(x, y) &= \partial_x u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y - \mathrm{e}^y \sin x, \qquad \text{sowie} \\ \partial_x v(x, y) &= -\partial_y u(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y - \mathrm{e}^y \cos x. \end{aligned}$$

Integration nach y bzw. x liefert dann die Gleichung

$$\int \partial_y v(x, y)\, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^x \sin y - \mathrm{e}^y \sin x + C_1(x) \overset{!}{=} \mathrm{e}^x \sin y - \mathrm{e}^y \sin x + C_2(y) = \int \partial_x v(x, y)\, \mathrm{d}x,$$

also $C_1(x) = 0 = C_2(y)$ und somit

$$v(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y - \mathrm{e}^y \sin x.$$

(c) Mit Teilaufgabe **(b)** gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^y \cos x + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y - \mathrm{i}\mathrm{e}^y \sin x \\ &= \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y) + \mathrm{e}^y (\cos x - \mathrm{i} \sin x) \\ &= \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^y \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ &= \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}. \end{aligned}$$

A 3. [5+1+3 Punkte] Betrachten Sie zu $a, b > 0$ die Menge

$$M_{a,b} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 4 \right\}.$$

(a) Nutzen Sie das Vektorfeld $w(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)^T$, um mit Hilfe des Satzes von Ostrogradski-Gauss den Flächeninhalt von $M_{a,b}$ zu berechnen.

(b) Sei weiter $Z := M_{1,1} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie Z.

(c) Sei ferner das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x, y, z) = (2x, y^2, y^2)^T.$$

Berechnen Sie $\int_{\partial Z} v \cdot \mathrm{d}\vec{A}$.

Lösung: **(a)** Der Satz von Ostrogradski-Gauss ("Gauss in $\mathbb{R}^2$") angewandt auf unsere Menge $M_{a,b}$ lautet

$$\int_{M_{a,b}} \operatorname{div} w \, \mathrm{d}V = -\int_{\partial M_{a,b}} w \cdot \mathrm{d}\vec{s}^{\perp},$$

wobei hier

$$\operatorname{div} w = \partial_x w_1 + \partial_y w_2 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

gilt; das linke Integral ist also genau der Flächeninhalt von $M_{a,b}$. Zur Berechnung der rechten Seite parametrisieren also zunächst die Ellipse $\partial M_{a,b}$ durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = (2a\cos t, 2b\sin t)^T.$$

Damit ergibt sich $w \cdot \mathrm{d}\vec{s}^{\perp}$ wegen $\mathrm{d}\vec{s}^{\perp} = (-\,\mathrm{d}y,\, \mathrm{d}x)^T$ zu

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a\cos t \\ 2b\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2b\cos t \\ -2a\sin t \end{pmatrix} = -2ab(\cos^2 t + \sin^2 t) = -2ab$$

und damit

$$|M_{a,b}| = \int_{M_{a,b}} 1 \, \mathrm{d}A = \int_{M_{a,b}} \operatorname{div} w \, \mathrm{d}A = -\int_{\partial M_{a,b}} w \cdot \mathrm{d}\vec{s}^{\perp} = \int_0^{2\pi} 2ab \, \mathrm{d}t = 4\pi ab.$$

(b) $M_{a,b}$ ist eine Ellipse mit Längen der Halbachsen $2a$ und $2b$, $M_{1,1}$ ist daher ein Kreis mit Radius 2 und Z folglich ein Zylinder mit Radius 2 und Höhe $|[-1,1]| = 2$. (In der Skizze muss nur erkennbar sein, dass es sich um einen Zylinder handelt.)

(c) Für den Integralsatz von Gauss

$$\int_Z \operatorname{div} v \, \mathrm{d}V = \int_{\partial Z} v \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

berechnen wir zunächst

$$\operatorname{div} v = 2 + 2y.$$

Da in Zylinderkoordinaten $y = r\sin\varphi$ gilt, folgt mit dem Transformationssatz dann

$$\int_{\partial Z} v \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_Z 2 + 2y \, \mathrm{d}V = 2|Z| + \int_{-1}^{1} \int_0^2 r \int_0^{2\pi} (2r\sin\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z.$$

Da das Integral über die Winkel verschwindet und das Volumen des Zylinders $|Z| = A \cdot h = 4\pi \cdot 2 = 8\pi$ ist, folgt

$$\int_{\partial Z} v \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 2|Z| = 16\pi.$$

A 4. [3+3+2 Punkte] Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z+2}{1+(z+2)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Polstellen von f und die zugehörigen Residuen.

(b) Gegeben seien die Wege

$$\gamma_1 : [0,1) \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = \mathrm{e}^{4\pi i t},$$
$$\gamma_2 : [0,1) \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = 4\mathrm{e}^{4\pi i t}.$$

Skizzieren Sie beide Wege und die Polstellen in ein gemeinsames Schaubild. Berechnen Sie die beiden Integrale

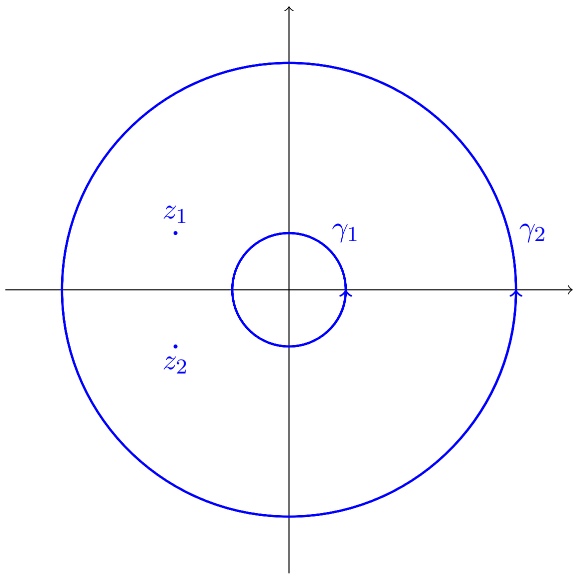
$$(i) \int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z, \qquad (ii) \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

(c) Entwickeln Sie die Funktion in $z_0 = -2$ in eine Potenzreihe und geben Sie den Konvergenzradius an.

Lösung: **(a)** Die Polstellen von f sind gegeben durch $z_{1/2} = -2 \pm \mathrm{i}$, die zugehörigen Residuen sind damit

$$\operatorname{Res}(f, -2+\mathrm{i}) = \frac{z+2}{z+2+\mathrm{i}}\bigg|_{z=-2+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\,,$$
$$\operatorname{Res}(f, -2-\mathrm{i}) = \frac{z+2}{z+2-\mathrm{i}}\bigg|_{z=-2-\mathrm{i}} = \frac{1}{2}.$$

(b)



Das Integral über γ_1 ist null, da f in $B_2(0)$ holomorph und der Weg geschlossen ist. Für das Integral über γ_2 verwenden wir den Residuensatz und erhalten wegen der Umlaufzahl 2 damit

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\big(2\operatorname{Res}(f,-2+\mathrm{i}) + 2\operatorname{Res}(f,-2-\mathrm{i})\big) = 4\pi\mathrm{i}.$$

(c) Für die Potenzreihe erkennen wir, dass die Funktion auf $(z+2)$-mal eine geometrische Reihe zurückgeführt werden kann, d.h.

$$\begin{aligned}\frac{z+2}{1-(-(z+2)^2)} &= (z+2)\sum_{k=0}^{\infty}(-(z+2)^2)^k \\ &= (z+2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+2)^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z+2)^{2k+1}.\end{aligned}$$

Mit dem Konvergenzradius der geometrischen Reihe sieht man, dass der Konvergenzradius 1 ist.

A 5. [1+4 Punkte] Gegeben seien die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le y\mathrm{e}^{-x} \le 9 \quad \wedge \quad 1 \le y\mathrm{e}^{x} \le 9\}$$

und die Transformation $\varphi : M \to [1,9] \times [1,9]$ mit

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{-x} \\ y\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\det(\varphi'(x,y))$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M mit Hilfe der Transformationsformel für Volumenintegrale.

Lösung: **(a)** Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jacobimatrix von $\varphi(x,y)$. Es gilt

$$\det \varphi'(x,y) = \det \begin{pmatrix} -y\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{-x} \\ y\mathrm{e}^{x} & \mathrm{e}^{x} \end{pmatrix} = -2y.$$

(b) Um den Flächeninhalt von M zu berechnen, verwenden wir den Transformationssatz und erhalten

$$\operatorname{vol} M = \int_M 1 \,\mathrm{d}V = \int_{\varphi^{-1}(M)} |\det(\varphi^{-1})'(u,v)| \,\mathrm{d}V.$$

Wir führen die Variablen $u = y\mathrm{e}^{-x}$ und $v = y\mathrm{e}^{x}$ ein. Dann gilt

$$y^2 = u \cdot v,$$

insbesondere ist φ injektiv und der Transformationssatz anwendbar. Aus **(a)** folgt dann

$$|\det(\varphi^{-1})'(u,v)| = \left| \frac{1}{\det \varphi'(x(u,v), y(u,v))} \right| = \left| \frac{1}{-2y(u,v)} \right| = \frac{1}{2\sqrt{uv}}.$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt von M

$$\operatorname{vol} M = \int_1^9 \int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{uv}} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = 2\left[\sqrt{u}\right]_1^9 \left[\sqrt{v}\right]_1^9 = 8.$$

A 6. [3+3+1 Punkte] Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' - \frac{2y}{1-x^2} - x - 1 = 0, \qquad -1 < x < 1.$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des zugehörigen homogenen Problems.

(b) Finden Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = \frac{1}{2}$.

Lösung: **(a)** Wir betrachten das homogene Problem

$$y' - \frac{2y}{1-x^2} = 0.$$

Wir betrachten den Fall, dass $y(x) \neq 0$ für alle $-1 < x < 1$ ist. Mit Hilfe der Trennung der Variablen erhalten wir für $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\ &\quad \ln|y| = \ln\frac{1+x}{1-x} + c, \qquad c \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow\ &\qquad y = C\,\frac{1+x}{1-x}, \qquad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass ein x existiert mit $y(x) = 0$, ist $y \equiv 0$ eine Lösung. Zusammen erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y_{\mathrm{hom}}(x) = C\,\frac{1+x}{1-x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Um eine spezielle Lösung zu finden, verwenden wir die Variation der Konstanten. Wir setzen dazu

$$y(x) = C(x)\frac{1+x}{1-x}$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$C'(x)\frac{1+x}{1-x} + \underbrace{C(x)\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} - 2C(x)\frac{1+x}{1-x}\frac{1}{(1-x)(1+x)}}_{=0} = 1+x$$

und damit $C'(x) = 1-x$, also zum Beispiel $C(x) = x - \frac{1}{2}x^2$. Demnach ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems gegeben durch

$$y_{\mathrm{spez}}(x) = \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\frac{1+x}{1-x}.$$

(c) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems lautet

$$y(x) = y_{\mathrm{hom}}(x) + y_{\mathrm{spez}}(x) = \left(C + x - \frac{1}{2}x^2\right)\frac{1+x}{1-x}.$$

Einsetzen des Anfangswertes liefert $C = \frac{1}{2}$, also ist die Lösung des AWP gegeben durch

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2\right)\frac{1+x}{1-x}.$$