Modulprüfung zur Höheren Mathematik 3

für kyb, mecha, phys

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 10 Aufgaben mit insgesamt 60 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 2 DIN A4 Seiten einseitig (oder 1 DIN A4 Seite doppelseitig) handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In allen Aufgaben zählen Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier, versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und **beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt**.
- Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Legen Sie alle Blätter, die Sie abgeben möchten, am Ende des Bearbeitungszeitraumes in das Umschlagblatt.
- Den Inhalt der folgenden Tabellen können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(t)$	e^{kt}	$t^n\,e^{kt}$	$\cos kt$	$\sin kt$
$\mathcal{L}[f](\lambda)$	$\frac{1}{\lambda-k}$	$\frac{n!}{(\lambda-k)^{n+1}}$	$\frac{\lambda}{\lambda^2+k^2}$	$\frac{k}{\lambda^2+k^2}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus. Viel Erfolg bei der Prüfung!

A 1. [3+1+3 Punkte] Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine **komplexe** Lösung $y_{\mathbb{C}}$ von $y' = Ay$.

(c) Verwenden Sie **(b)**, um die zugehörige allgemeine **reelle** Lösung $y_{\mathbb{R}}$ zu bestimmen.

A 2. [1+2+1 Punkte] Wir betrachten die durch

$$u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^y \cos x$$

gegebene Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Ist u harmonisch?

(b) Wir identifizieren nun wie in der Vorlesung $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

(c) Schreiben Sie f als Funktion von z.

A 3. [7 Punkte] Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} \,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Wählen Sie dazu einen geeigneten geschlossenen Integrationsweg γ und begründen Sie insbesondere, weshalb $I = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ gilt.

A 4. [4+2 Punkte] Sei $0 < a < \pi$. Wir betrachten die Funktion $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{für } |x| < a, \\ 0 & \text{für } -\pi < x \leq -a \text{ oder } a \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die **reelle** Fourrierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von f.

(b) Nutzen Sie die Fourrierreihe aus **(a)**, um den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$$

zu bestimmen.

A 5. [5+1+3 Punkte] Betrachten Sie zu $a, b > 0$ die Menge

$$M_{a,b} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4 \right\}.$$

(a) Nutzen Sie das Vektorfeld $w(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)^T$, um mit Hilfe des Satzes von Ostrogradski-Gauss den Flächeninhalt von $M_{a,b}$ zu berechnen.

(b) Sei weiter $Z := M_{1,1} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie Z.

(c) Sei ferner das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x,y,z) = (2x, y^2, y^2)^T.$$

Berechnen Sie $\int_{\partial Z} v \cdot \mathrm{d}\vec{A}$.

A 6. [3+3+2 Punkte] Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{z+2}{1+(z+2)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Polstellen von f und die zugehörigen Residuen.

(b) Gegeben seien die Wege

$$\gamma_1 : [0,1) \to \mathbb{C}, \quad \gamma_1(t) = \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} t},$$
$$\gamma_2 : [0,1) \to \mathbb{C}, \quad \gamma_2(t) = 4\mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} t}.$$

Skizzieren Sie beide Wege und die Polstellen in ein gemeinsames Schaubild. Berechnen Sie die beiden Integrale

$$(i) \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z, \qquad (ii) \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(c) Entwickeln Sie die Funktion in $z_0 = -2$ in eine Potenzreihe und geben Sie den Konvergenzradius an.

A 7. [4 Punkte] Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung f der Differential-Integralgleichung

$$f'(x) = 4 \int_0^x \mathrm{e}^{-3(x-y)} f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad f(0) = 1.$$

A 8. [1+4 Punkte] Gegeben seien die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq y\mathrm{e}^{-x} \leq 9 \quad \wedge \quad 1 \leq y\mathrm{e}^{x} \leq 9\}$$

und die Transformation $\varphi : M \to [1, 9] \times [1, 9]$ mit

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{-x} \\ y\mathrm{e}^{x} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\det(\varphi'(x, y))$.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M mit Hilfe der Transformationsformel für Volumenintegrale.

A 9. [3+3+1 Punkte] Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y' - \frac{2y}{1 - x^2} - x - 1 = 0, \qquad -1 < x < 1.$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des zugehörigen homogenen Problems.

(b) Finden Sie eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung zum Anfangswert $y(0) = \frac{1}{2}$.

A 10. [3 Punkte] Es sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, $G \subset U$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \subset U$ und $p \in G$ ein Punkt im Gebiet. Weiterhin sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft

$$|f(p)| < \min\{|f(z)| : z \in \partial G\}.$$

Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in G besitzt.