Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

9. März 1992

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik III

1. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind alle sechs Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!

Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Mitte April im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 27. April 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

a) Überführen Sie mit Hilfe der Substitution $z = \exp(ix)$ das reelle Integral

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{3}{5+4\sin x}\, dx$$

in ein komplexes Kurvenintegral

$$I = \int_C f(z)dz\ .$$

b) Berechnen Sie dieses Kurvenintegral mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 2

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{für} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x) \; .$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f für $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

b) Bestimmen Sie die reelle und die komplexe Fourier-Reihe von f.

c) Berechnen Sie durch Wahl eines speziellen x-Wertes den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \; .$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z^2+z} \; .$$

b) Zum Entwicklungspunkt $z = -1$ gibt es zwei Laurent-Reihen. Bestimmen Sie die beiden Laurent-Reihen und ihr jeweiliges Konvergenzgebiet.

Aufgabe 4

Gegeben sei der Körper $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x, 0 \leq x\}$.

a) Beschreiben Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (r, θ, z).

b) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

c) Berechnen Sie den Fluß Φ des Vektorfeldes $v := (xy^2, yx^2, x^2y^2)^t$ durch die Oberfläche von K von innen nach außen.

Aufgabe 5

Nach einem der Maxwell'schen Gesetze der Elektrostatik besteht zwischen der räumlichen Ladungsdichte ρ und dem Vektorfeld D des elektrischen Flusses der Zusammenhang $\rho = \operatorname{div} D$. Sei nun in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) die nur von r abhängige Ladungsdichte

$$\rho(r) := \frac{1}{1+r^2}$$

gegeben. Aus Symmetriegründen ist dann auch das Vektorfeld D nur von r abhängig und besitzt nur eine Komponente in Richtung des radialen Einheitsvektors $\mathbf{e}_r$, es ist also

$$D(r) = f(r)\,\mathbf{e}_r\ ,$$

wobei f eine nur von r abhängige reelle Funktion ist.

a) Berechnen Sie die Gesamtladung $Q(R) = \iiint \rho$ im Inneren der Kugel $K(R)$ mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung.

b) Zeigen Sie: Für den Fluß $\Phi(R) = \iint D$ von D durch die Oberfläche der Kugel $K(R)$ von innen nach außen gilt

$$\Phi(R) = 4\pi R^2 f(R)\ .$$

c) Bestimmen Sie die Funktion f.

Aufgabe 6

Gegeben sei die singuläre analytische Differentialgleichung

$$2z^2 w''(z) - (z + 2z^2)w'(z) + w(z) = 0\ .$$

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf die Form

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0$$

und bestimmen Sie die Polstellen von $p(z)$ und $q(z)$ und deren Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen $\lambda_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung.

Betrachten Sie von nun an *nur* denjenigen Exponenten λ mit dem kleineren Realteil.

c) Geben Sie eine Rekursionsformel an für die Koeffizienten c_k im Ansatz

$$w(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\ .$$

d) Bestimmen Sie für $c_0 := 1$ die Koeffizienten c_k explizit und geben Sie die zugehörige Lösung $w(z)$ in geschlossener Form an.