Modulprüfung

- Es gibt 10 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl ist 63. Zum Bestehen sind 30 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Verwendet werden dürfen eigene Stifte und Papier, sowie Lineal und Geodreieck.
- In den Aufgaben sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden zwei Kästchen korrekt aus.
- Bitte lesen Sie alle Aufgaben aufmerksam durch.
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem **extra Blatt**. Beschriften Sie jedes der Blätter mit Ihrem Namen.
- Legen Sie am Ende Ihre Lösungen in den Umschlagbogen.
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Σ

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [2 Punkte]

Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene:

$$L := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - (\mathrm{i} - 1)| \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \pi \right\}$$

A 2. [7 Punkte]

Sei $\mathcal{P}_2 = \{p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid p$ ist Polynom vom Grad $\leq 2\}$ und sei $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ die lineare Abbildung, die durch

$$T\colon p \mapsto (x+1)p'$$

gegeben ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet. Seien ferner $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x+1$ und $q_2(x) = x^2 + 2x + 1$ und $\mathcal{B} = \{q_0, q_1, q_2\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.

(b) Bestimmen Sie $T(q_j)$ für $j = 0, 1, 2$.

(c) Zeigen Sie, dass $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

(d) Bestimmen Sie alle $p \in \mathcal{P}_2$ mit

$$T(p) = 2x^2 + 5x + 3\ .$$

A 3. [12 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die (eventuell uneigentlichen) Grenzwerte der nachstehend definierten Folgen (x_n):

(i) $x_n = \dfrac{4\sqrt[3]{n^2} - 2n^2}{3n^2 - 2n + 1}$ (ii) $x_n = \sqrt{n^2 - n^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{n^2 + n}$

(b) Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \text{ für } n \in \mathrm{N}.$$

(i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass (a_n) streng monoton fällt.

(iii) Warum ist die Folge (a_n) konvergent? Berechnen Sie den Grenzwert.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{10}\right)^{k+1}$.

A 4. [4 Punkte]

Prüfen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4-(-1)^k}{k^{3k}}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(k^2)!}$

A 5. [4 Punkte]

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x \tan x} .$$

A 6. [6 Punkte]

(a) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei injektive Funktionen. Zeigen Sie, dass die Komposition $h := g \circ f : X \to Z$ ebenfalls eine injektive Funktion ist.

(b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ folgende Aussage gilt:
Sind $X_1, \ldots, X_{n+1}$ Mengen und $f_i : X_i \to X_{i+1}$ injektive Abbildungen für $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann ist auch die Komposition $f := f_n \circ \ldots \circ f_1 : X_1 \to X_{n+1}$ eine injektive Abbildung.

A 7. [6 Punkte]

Die Kurve $K_\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, 2]\}$ ist durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi t) \\ |t-1| \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2,$$

parametrisiert.

(a) Überprüfen Sie, ob K_γ geschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass K_γ **keine** Jordan-Kurve ist.

(c) Begründen Sie mithilfe des Tangentenvektors, weshalb das Schaubild von K_γ im Punkt $P = (0, 1)^T$ einen Knick besitzt.

A 8. [5 Punkte]

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 2x - y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und klassifizieren Sie diese.

A 9. [8 Punkte]

Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

(a) $\displaystyle\int \left(\sin(3x) - \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{(x-1)(x^2+4)} \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos(bx) \, \mathrm{d}x$ für $a, b > 0$

A 10. [9 Punkte]

(a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''' + y'' - 10y' + 8y = 18\sqrt{8}\,\cos(\sqrt{8}x). \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen der zu (1) gehörenden homogenen Differentialgleichung.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$y(x) = -\sin(\sqrt{8}x)$$

eine partikuläre Lösung von (1) ist.

(iii) Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung (1) an.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$x^3 y' = y(x-1) \quad \text{für } x > 0.$$