Priv.-Doz. Dr. P. H. Lesky
Arne Geyer, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dr. Sam Thelin

Modulprüfung - Musterlösung

- Es gibt 10 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl ist 63. Zum Bestehen sind 30 Punkte hinreichend.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Verwendet werden dürfen eigene Stifte und Papier, sowie Lineal und Geodreieck.
- In den Aufgaben sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden zwei Kästchen korrekt aus.
- Bitte lesen Sie alle Aufgaben aufmerksam durch.
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem **extra Blatt**. Beschriften Sie jedes der Blätter mit Ihrem Namen.
- Legen Sie am Ende Ihre Lösungen in den Umschlagbogen.
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Σ
2	7	12	4	4	6	6	5	8	9		63

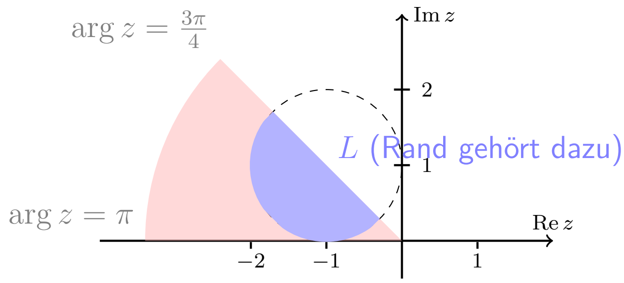
peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [2 Punkte]

Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene:

$$L := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - (\mathrm{i} - 1)| \leq 1 \quad \wedge \quad \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \pi \right\}$$

Lösung:



A 2. [7 Punkte]

Sei $\mathcal{P}_2 = \{p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 2\}$ und sei $T \colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ die lineare Abbildung, die durch

$$T \colon p \mapsto (x+1)p'$$

gegeben ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet. Seien ferner $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x + 1$ und $q_2(x) = x^2 + 2x + 1$ und $\mathcal{B} = \{q_0, q_1, q_2\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist.

(b) Bestimmen Sie $T(q_j)$ für $j = 0, 1, 2$.

(c) Zeigen Sie, dass $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.

(d) Bestimmen Sie alle $p \in \mathcal{P}_2$ mit

$$T(p) = 2x^2 + 5x + 3\,.$$

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

Lösung:

(a) Angenommen
$$\alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0$$
mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Einsetzen von $x = -1$, $x = 0$ bzw. $x = 1$ gibt
$$\begin{cases} \alpha_0 q_0(-1) + \alpha_1 q_1(-1) + \alpha_2 q_2(-1) = 0 \\ \alpha_0 q_0(0) + \alpha_1 q_1(0) + \alpha_2 q_2(0) = 0 \\ \alpha_0 q_0(1) + \alpha_1 q_1(1) + \alpha_2 q_2(1) = 0 \end{cases}$$
Es folgt
$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$$
Dieses Gleichungssystem hat $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ als einzige Lösung. Also ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig.

(b) Es gilt
$$T(q_0)(x) = (x+1)q_0'(x) = 0,$$
$$T(q_1)(x) = (x+1)q_1'(x) = x + 1$$
und
$$T(q_2)(x) = (x+1)q_2'(x) = (x+1)(2x+2) = 2x^2 + 4x + 2.$$

(c) Aus **(b)** folgt, dass
$$T(q_0) = 0, \quad T(q_1) = q_1 \quad \text{und} \quad T(q_2) = 2q_2$$
sind. Daraus folgt, dass
$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
ist. Also ist $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix.

(d) Bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ lässt sich die Gleichung als

$$M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p)_{\mathcal{B}} = (2x^2 + 5x + 3)_{\mathcal{B}}$$

schreiben. Da $2x^2 + 5x + 3 = q_1(x) + 2q_2(x)$ haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} (p)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Lösungsmenge dieses Systems ist

$$\{(p)_{\mathcal{B}} = [\lambda \quad 1 \quad 1]^T : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung $T(p) = 2x^2 + 5x + 3$ ist also

$$\{p = \lambda q_0 + q_1 + q_2 \colon \lambda \in \mathbb{C}\},$$

das heißt

$$\{x^2 + 3x + \mu \colon \mu \in \mathbb{C}\}$$

wobei $\mu = \lambda + 2$ ist.

A 3. [12 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die (eventuell uneigentlichen) Grenzwerte der nachstehend definierten Folgen (x_n):

(i) $x_n = \dfrac{4\sqrt[3]{n^2} - 2n^2}{3n^2 - 2n + 1}$ (ii) $x_n = \sqrt{n^2 - n^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{n^2 + n}$

(b) Die Folge (a_n) ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \text{ für } n \in \mathrm{N}.$$

(i) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass (a_n) streng monoton fällt.

(iii) Warum ist die Folge (a_n) konvergent? Berechnen Sie den Grenzwert.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{10}\right)^{k+1}$.

Lösung:

(a) (i) Die maximalen Potenzen im Zähler und Nenner stimmen überein.
Daher ist $x_n \to -2/3$.

(ii) Es gilt

$$x_n = \sqrt{n^2 - n^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{n^2+n} = \frac{(n^2 - n^{3/2}) - (n^2+n)}{\sqrt{n^2 - n^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{n^2+n}}$$

$$= -\frac{n^{3/2}+n}{\sqrt{n^2 - n^{\frac{3}{2}}} + \sqrt{n^2+n}} = -\sqrt{n}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to -\infty.$$

(b) (i) Induktionsanfang: Es ist $a_2 = 4 - 1/a_1 = 4 - 1/4 = \frac{15}{4} \geq 2$.
Induktionsschritt: Es gelte $a_n \geq 2$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ (IV).
Dann folgt

$$a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \overset{\text{IV}}{\geq} 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \geq 2$$

und somit die Induktionsbehauptung $a_{n+1} \geq 2$.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Wir beweisen die Aussage $a_{n+1} < a_n$ für $n \geq 2$.
Induktionsanfang: Es gilt $a_2 = \frac{15}{4} < \frac{16}{4} = a_1$.
Induktionsschritt: Die Aussage $a_{n+1} < a_n$ gelte für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ (IV).
Es folgt

$$a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} \overset{\text{IV}}{<} 4 - \frac{1}{a_{n-1}} = a_n$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Da (a_n) monoton fällt und nach unten beschränkt ist, ist sie nach einem Satz aus der Vorlesung konvergent.
Nennen wir den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$, dann gilt

$$a = 4 - \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \pm \sqrt{3}$$

und wegen $a \geq 2$ folgt $a = 2 + \sqrt{3}$.

(c) Mit der geometrischen Summenformel gilt wegen $\pi < \frac{10}{3}$ auch $q = \frac{3\pi}{10} < 1$ und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{10}\right)^{k+1} = \frac{3\pi}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{10}\right)^{k} = \frac{3\pi}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{3\pi}{10}} = \frac{3\pi}{10-3\pi}.$$

A 4. [4 Punkte]

Prüfen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4-(-1)^k}{k^{3k}}$ (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{(k^2)!}$

Lösung:

(i) Es ist $3 \leq |4-(-1)^k| \leq 5$ und wegen $k^{3k} < k^2$
konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium absolut.
Alternativ: Wurzelkriterium. Dabei muss aber zwingend der Grenzwert (bzw. $\limsup$*) des Quotienten betrachtet werden.*

(ii) Nach dem Majorantenkriterium ist für $k \geq 2$

$$0 < \frac{(k+1)!}{(k^2)!} = \frac{k!(k+1)}{k!(k+1)(k+2)\cdots(k^2-1)k^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

und die Reihe somit absolut konvergent.
Alternativ: Quotientenkriterium. Dabei muss aber zwingend der Grenzwert (bzw. $\limsup$*) des Quotienten betrachtet werden.*

A 5. [4 Punkte]

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x \tan x} \,.$$

Lösung:

Nach der Regel von l'Hospital ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x \tan x} &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)}{\tan x + x\frac{1}{\cos^2(x)}} \\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2)}{\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)+2x\sin(x)\cos(x)}{\cos^4(x)}} \\
&= \frac{2-0}{1+\frac{1+0}{1}} = 1.
\end{aligned}$$

A 6. [6 Punkte]

(a) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei injektive Funktionen. Zeigen Sie, dass die Komposition $h := g \circ f : X \to Z$ ebenfalls eine injektive Funktion ist.

(b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ folgende Aussage gilt:
Sind $X_1, \ldots, X_{n+1}$ Mengen und $f_i : X_i \to X_{i+1}$ injektive Abbildungen für $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann ist auch die Komposition $f := f_n \circ \ldots \circ f_1 : X_1 \to X_{n+1}$ eine injektive Abbildung.

Lösung:

(a) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $h(x_1) = h(x_2)$, oder äquivalent $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Da g injektiv ist folgt $f(x_1) = f(x_2)$.

Da f injektiv ist folgt $x_1 = x_2$.

Somit ist h injektiv.

(b) **Induktionsanfang:** $n = 2$

Seien f_1, f_2 injektiv. Dann folgt aus **(a)**, dass $f_2 \circ f_1$ injektiv ist.

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_{n \geq 2}$ gelte:

$f_1, \ldots, f_n$ injektiv $\implies$ $f := f_n \circ \ldots \circ f_1$ injektiv.

Induktionsschluss:

Seien $f_1, \ldots, f_{n+1}$ injektiv.

Es folgt aus der Induktionsannahme, dass $\widetilde{f} := f_n \circ \ldots \circ f_1$ injektiv ist.

Dann folgt aus dem Induktionsanfang, dass $f = f_{n+1} \circ \ldots \circ f_1 = f_{n+1} \circ \widetilde{f}$ injektiv ist.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ wahr ist.

A 7. [6 Punkte]

Die Kurve $K_\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, 2]\}$ ist durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi t) \\ |t-1| \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 2,$$

parametrisiert.

(a) Überprüfen Sie, ob K_γ geschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass K_γ **keine** Jordan-Kurve ist.

(c) Begründen Sie mithilfe des Tangentenvektors, weshalb das Schaubild von K_γ im Punkt $P = (0, 1)^T$ einen Knick besitzt.

Lösung:

(a) Wegen

$$\gamma(0) = (\sin(0), |-1|)^T = (0,1)^T = (\sin(4\pi), |+1|)^T = \gamma(2)$$

ist die Kurve geschlossen.

(b) Wegen

$$\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sin(\pi) \\ \left|\frac{1}{2} - 1\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(3\pi) \\ \left|\frac{3}{2} - 1\right| \end{pmatrix} = \gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

ist K_γ nicht injektiv, also keine Jordan-Kurve.

(c) Wir betrachten den rechts- und linksseitigen Grenzwert von $\gamma'(t)$ für $t \to 0^+$ bzw. $t \to 2^-$. Bezeichne γ_- die Parametrisierung für $t \leq 1$ und γ_+ die für $t \geq 1$. Dann ist

$$\gamma_\pm'(t) = \begin{pmatrix} 2\pi\cos(2\pi t) \\ \pm 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2\pi \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

für $t \to 0^+$ bzw. $t \to 2^-$. Also unterscheiden sich die beiden links- und rechtsseitigen Grenzwerte und die Kurve besitzt einen Knick.

A 8. [5 Punkte]

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 2x - y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und klassifizieren Sie diese.

Lösung:
Notwendig ist die Bedingung $\nabla f(x,y) = 0$, d.h.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - 3y + 2 \\ 2y - 3x - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dies ist ein LGS mit eindeutiger Lösung $x = 1$ und $y = 2$, d.h. das einzige potentielle Extremum liegt in $(1,2)^T$.
Für das hinreichende Kriterium betrachten wir die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese ist wegen $\det H_f(1,2) = 8 - 9 = -1 < 0$ indefinit, es liegt also ein Sattelpunkt vor.
Alternativ berechnet man die Eigenwerte und sieht, dass beide unterschiedliches Vorzeichen haben.

A 9. [8 Punkte]

Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

(a) $\displaystyle\int \left(\sin(3x) - \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{(x-1)(x^2+4)} \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos(bx) \,\mathrm{d}x$ für $a, b > 0$

Lösung:

(a) Man rechnet direkt nach, dass

$$\int \left(\sin(3x) - \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{3}{x} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Mittels Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{5x^2}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{x-1} + \frac{4x+4}{x^2+4}.$$

Damit ist sofort

$$\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

sowie

$$\int \frac{4x+4}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{4x}{x^2+4} + \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)\mathrm{d}x.$$

Wiederum einzeln betrachtet, erhalten wir mit $u = x^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{4x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{u+4}\,\mathrm{d}u = 2\ln|u+4| + c = 2\ln|x^2+4| + c,$$

sowie mit der Substitution $u = \frac{x}{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2}$

$$\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 2\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\arctan u + c = 2\arctan\frac{x}{2} + c.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int \frac{5x^2}{(x+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + 2\ln|x^2+4| + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c. \qquad c \in \mathbb{R}$$

(c) Wir integrieren zwei mal partiell und erhalten zunächst

$$\begin{aligned} I := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\frac{1}{b}\sin(bx)\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{a}{b}\int_0^\infty \sin(bx)\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{-\frac{a}{b^2}\cos(bx)\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^\infty}_{=\frac{a}{b^2}} - \frac{a^2}{b^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I. \end{aligned}$$

Somit ist $b^2 I = a - a^2 I$, also $I = \frac{a}{a^2+b^2}$.

A 10. [9 Punkte]

(a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''' + y'' - 10y' + 8y = 18\sqrt{8}\,\cos(\sqrt{8}x). \tag{1}$$

(i) Bestimmen Sie alle Lösungen der zu (1) gehörenden homogenen Differentialgleichung.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$y(x) = -\sin(\sqrt{8}x)$$

eine partikuläre Lösung von (1) ist.

(iii) Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung (1) an.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$x^3y' = y(x-1) \quad \text{für } x > 0.$$

Lösung:

(a) (i) Die homogene Differentialgleichung lautet $y''' + y'' - 10y' + 8y = 0$. Der Ansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ liefert

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^3 + \lambda^2 - 10\lambda + 8) = 0,$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -4$.
Die allgemeine homogene Lösung lautet somit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-4x}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Aus $y(x) = -\sin(\sqrt{8}x)$ folgt sofort $y'(x) = -\sqrt{8}\cos(\sqrt{8}x)$, sowie $y''(x) = 8\sin(\sqrt{8}x)$ und $y'''(x) = 8\sqrt{8}\cos(\sqrt{8}x)$.
Einsetzen in (1) liefert die Behauptung.

(iii) Es ist

$$y_{\text{allg}}(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-4x} - \sin(\sqrt{8}x), \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Eine spezielle Lösung ist $y(x) = 0$.
Sei also $y \neq 0$, dann liefert Separation der Variablen

$$\begin{aligned}
&& \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{x-1}{x^3} \\
\Leftrightarrow && \ln|y| &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c \\
\Leftrightarrow && |y(x)| &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}} \cdot \mathrm{e}^{c} \\
\Leftrightarrow && y(x) &= d \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}}
\end{aligned}$$

für $c, d \in \mathbb{R}$, wobei die spezielle Lösung $y = 0$ den Wert $d = 0$ liefert.