Modulprüfung

- Es gibt 10 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl ist 65.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Zum Bestehen sind 31 Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Verwendet werden dürfen eigene Stifte und Papier, sowie Lineal und Geodreieck.
- In den Aufgaben sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden zwei Kästchen korrekt aus.
- Bitte lesen Sie alle Aufgaben aufmerksam durch.
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem **extra Blatt**. Beschriften Sie jedes der Blätter mit Ihrem Namen.
- Legen Sie am Ende Ihre Lösungen in den Umschlagbogen.
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Σ

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [5 Punkte]

Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene:

$$L := \left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \mathrm{Im}\Big(-\frac{1}{z}\Big) \geq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

A 2. [6 Punkte]

Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Durch

$$T(b_1) := 2b_2,\ T(b_2) := 3b_3,\ T(b_3) = 0$$

ist eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eindeutig definiert.

(i) Geben Sie die Matrix $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an.

(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(T)$ und $\mathrm{Bild}(T)$.

(iii) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, $M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, wobei

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(iv) Berechnen Sie $M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

A 3. [12 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die (eventuell uneigentlichen) Grenzwerte der nachstehend definierten Folgen (x_n):

(i) $x_n = \dfrac{2\sqrt[4]{n^3} + 3n^3}{2n^3 - 7n + 1}$ (ii) $x_n = \sqrt{n^4 - n^2} - \sqrt{n^4 + n^{\frac{5}{2}}}$

(b) Gegeben ist die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{10}{a_n}\Big) \text{ für } n \in \mathrm{N}. \tag{$*$}$$

(i) Beweisen Sie: Ist $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n > 0$, dann folgt $a_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit $a_{n+1} - \sqrt{10} \geq 0$.

(ii) Nun sei $a_1 = 10$ und a_n für $n \geq 2$ durch $(*)$ definiert. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n \geq \sqrt{10}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist die Folge (a_n) sinnvoll definiert.

(iii) Beweisen Sie, dass $\dfrac{10}{a_n} \leq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iv) Beweisen Sie, dass (a_n) streng monoton fällt.

(v) Warum ist die Folge (a_n) konvergent? Berechnen Sie den Grenzwert.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 4. [4 Punkte] Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}(z-1)^k.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(b) Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

A 5. [3 Punkte] Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \mathrm{e}^{3x}}{2\tan^2 x}\,.$$

A 6. [5 Punkte]

(a) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Geben Sie die Definition für die Surjektivität von f an.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die nicht surjektiv ist.

(c) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei surjektive Funktionen. Zeigen Sie, dass die Komposition $h := g \circ f : X \to Z$ ebenfalls eine surjektive Funktion ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel an für Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, so dass f nicht surjektiv, aber $g \circ f$ surjektiv ist.

A 7. [11 Punkte]

Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

(a) $\displaystyle\int \left(\cos(2x) + \frac{4}{x^3}\right) \mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int 1 \cdot (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ für $x > 0$ mit der Substitution $u = \sqrt{x}$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x-8}{x(x^2+4)} \,\mathrm{d}x.$

A 8. [4 Punkte]

(a) Geben Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ derjenigen spiralförmigen Kurve an, welche auf der Kegelfläche $z = \sqrt{x^2+y^2}$ liegt und die in $(0,0,0)^T$ beginnt, sich genau zwei mal gegen den Uhrzeigersinn dreht und in $(2\pi, 0, 2\pi)^T$ endet (siehe Abbildung 1).

(b) Begründen Sie, warum die Parametrisierung γ in allen $t \in [0,1]$ differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Werte $t \in [0,1]$, in denen die Parametrisierung γ regulär ist.

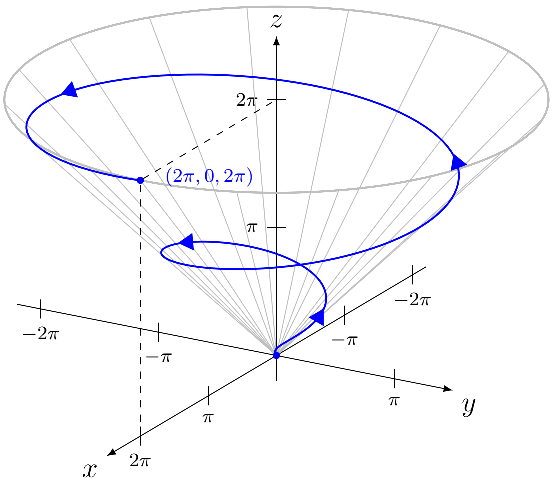

Abbildung 1: Kurve aus Teilaufgabe **(b)**.

A 9. [5 Punkte] Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2y^2 - 3xy + x^2 + 2y - x.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und klassifizieren Sie diese.

A 10. [10 Punkte]

(a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y \;=\; \mathrm{e}^{-2x}. \qquad (**)$$

(i) Zeigen Sie, dass $(**)$ eine Lösung der Form $y(x) = c\mathrm{e}^{-2x}$ besitzt.

(ii) Bestimmen Sie alle rellen Lösungen der Differentialgleichung $(**)$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$(x^4 + x^3)y' = y(x^2 - 1) \quad \text{für } x > 0.$$