Modulprüfung - Musterlösung

- Es gibt 10 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl ist 65.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Zum Bestehen sind 31 Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Verwendet werden dürfen eigene Stifte und Papier, sowie Lineal und Geodreieck.
- In den Aufgaben sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden zwei Kästchen korrekt aus.
- Bitte lesen Sie alle Aufgaben aufmerksam durch.
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem **extra Blatt**. Beschriften Sie jedes der Blätter mit Ihrem Namen.
- Legen Sie am Ende Ihre Lösungen in den Umschlagbogen.
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Σ
5	6	12	4	3	5	11	4	5	10		65

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [5 Punkte]

Skizzieren Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene:

$$L := \left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{z} \right) \geq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\}$$

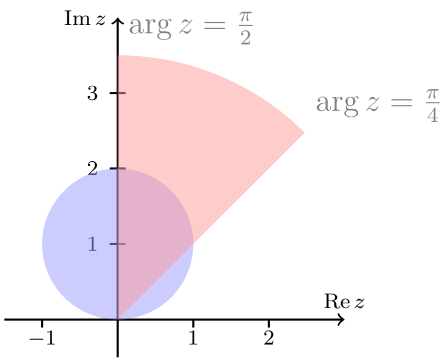
Lösung: Sei $z = x + \mathrm{i}\, y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{1}{z} \right) = \operatorname{Im}\left(-\frac{\bar{z}}{|z|^2} \right) = \operatorname{Im}\left(\frac{-x + \mathrm{i}\, y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{2} \qquad 1$$

$$\iff 0 \geq x^2 + y^2 - 2y$$

$$\iff 1 \geq x^2 + (y-1)^2 \qquad 2$$

Dies entspricht einem Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $z = i$.



2

A 2. [6 Punkte]

Gegeben sind die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Durch

$$T(b_1) := 2b_2, \; T(b_2) := 3b_3, \; T(b_3) = 0$$

ist eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eindeutig definiert.

(i) Geben Sie die Matrix $M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an.

(ii) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(T)$ und $\operatorname{Bild}(T)$.

(iii) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, $M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, wobei

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(iv) Berechnen Sie $M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

Lösung:

(a) Angenommen

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$$

mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Also erhält man das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Somit folgt $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ und $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig. 1

(b) (i) Es ist

$$M_T^{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ 1

(ii) $\mathrm{Bild}(T) = \mathrm{LH}(\{T(b_1), T(b_2), T(b_3)\}) = \mathrm{LH}(\{2b_2, 3b_3\}) = \mathrm{LH}(\{b_2, b_3\})$,
$\mathrm{Kern}(T) = \mathrm{LH}(\{b_3\})$. 1

(iii) Es ist

$$M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ 1

Weiter gilt

$$M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \left(M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -8 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ 1

(iv) Nun gilt

$$M_T^{\mathcal{E},\mathcal{E}} = M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}} \cdot M_T^{\mathcal{B},\mathcal{B}} \cdot M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$ 1

A 3. [12 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die (eventuell uneigentlichen) Grenzwerte der nachstehend definierten Folgen (x_n):

$$\text{(i) } x_n = \frac{2\sqrt[4]{n^3} + 3n^3}{2n^3 - 7n + 1} \qquad \text{(ii) } x_n = \sqrt{n^4 - n^2} - \sqrt{n^4 + n^{\frac{5}{2}}}$$

(b) Gegeben ist die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{10}{a_n}\Big) \text{ für } n \in \mathrm{N}. \qquad (*)$$

(i) Beweisen Sie: Ist $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n > 0$, dann folgt $a_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit $a_{n+1} - \sqrt{10} \geq 0$.

(ii) Nun sei $a_1 = 10$ und a_n für $n \geq 2$ durch $(*)$ definiert. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $a_n \geq \sqrt{10}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist die Folge (a_n) sinnvoll definiert.

(iii) Beweisen Sie, dass $\frac{10}{a_n} \leq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(iv) Beweisen Sie, dass (a_n) streng monoton fällt.

(v) Warum ist die Folge (a_n) konvergent? Berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:

(a) (i) Es gilt

$$x_n = \frac{3 + \frac{2}{\sqrt[4]{n^9}}}{2 - \frac{7}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \to \frac{3}{2}\,. \qquad \textcircled{1}$$

(ii) Es gilt

$$x_n = \sqrt{n^4 - n^2} - \sqrt{n^4 + n^{\frac{5}{2}}} = \frac{(n^4 - n^2) - (n^4 + n^{\frac{5}{2}})}{\sqrt{n^4 - n^2} + \sqrt{n^4 + n^{\frac{5}{2}}}} \qquad \textcircled{1}$$

$$= \frac{n^{5/2} + n^2}{\sqrt{n^4 - n^2} + \sqrt{n^4 + n^{\frac{5}{2}}}} = \sqrt{n}\,\underbrace{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}}}_{\to \frac{1}{2}} \to +\infty. \qquad \textcircled{1}$$

(b) (i) Ist $a_n \in \mathbb{R}$, so gilt $a_{n+1} \in \mathbb{R}$, da $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Weiter gilt dann

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq \sqrt{10} &\iff a_n + \frac{10}{a_n} \geq 2\sqrt{10} \\ &\iff a_n^2 + 10 \geq 2\sqrt{10}a_n \qquad \text{(wegen } a_n > 0) \\ &\iff (a_n - \sqrt{10})^2 \geq 0 \qquad \textcircled{2} \end{aligned}$$

Da die letzte Aussage für alle $a_n \in \mathbb{R}$ wahr ist, folgt die Behauptung.

(ii) Induktionsanfang n=1: Nach Voraussetzung ist $a_1 = 10 \geq \sqrt{10}$.
Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq \sqrt{10} > 0$. Dann gilt $a_{n+1} \geq \sqrt{10}$ nach **(b)**(i).
Induktionsschluss: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq \sqrt{10}$. 2

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq \sqrt{10}$ nach **(b)**(ii). Damit folgt

$$\frac{10}{a_n} \leq \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \leq a_n \,.$$ 1

(iv) Sei $n \in \mathbb{N}$. Mit $a_n \geq \frac{10}{a_n}$ aus **(b)**(iii) gilt dann

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{10}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$$ 1

Somit ist die Folge (a_n) monoton fallend.

(v) Da (a_n) eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist, ist sie konvergent. 1

Seit nun $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge (a_n). Dann folgt aus der Rekursionsvorschrift für $n \to +\infty$:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{10}{a}\right) \iff a^2 = 10 \iff a = \pm\sqrt{10} \,.$$

Wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daher $a = \sqrt{10}$. 2

A 4. [4 Punkte] Gegeben ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}(z-1)^k.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

(b) Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Lösung:

(a) Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^{k+1}}{k+1}}{\frac{2^k}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k+1} = 2 \,.$$

Somit ist der Konvergenzradius $R = \frac{1}{2}$. 1

(b) Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 1$. Somit konvergiert die Reihe für alle $z \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ und divergiert für $z \notin [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. 1

Es bleiben die Punkte $z = \frac{1}{2}$ und $z = \frac{3}{2}$ zu prüfen. Für $z = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Diese ist nach Leibniz-Kriterium konvergent, da $\frac{1}{k}$ positiv und monoton fallend ist. 1

Für $z = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Dies ist die Harmonische Reihe und somit divergent. 1

Folglich konvergiert die Reihe genau für alle $z \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

A 5. [3 Punkte] Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \mathrm{e}^{3x}}{2\tan^2 x}.$$

Lösung:

Nach der Regel von l'Hospital ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^{3x}}{2\tan^2 x} &\overset{\text{‘}\frac{0}{0}\text{’}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2+2x)\mathrm{e}^{3x}}{4\tan(x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} && (1)\\
&\overset{\text{‘}\frac{0}{0}\text{’}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(9x^2+12x+2)e^{3x}}{4\cdot\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}} && (1)\\
&= \frac{2\cdot 1}{4\cdot 1} = \frac{1}{2}. && (1)
\end{aligned}$$

A 6. [5 Punkte]

(a) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Geben Sie die Definition für die Surjektivität von f an.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, die nicht surjektiv ist.

(c) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei surjektive Funktionen. Zeigen Sie, dass die Komposition $h := g \circ f : X \to Z$ ebenfalls eine surjektive Funktion ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel an für Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ an, so dass f nicht surjektiv, aber $g \circ f$ surjektiv ist.

Lösung:

(a) Die Funktion $f : X \to Y$ heißt surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt. Das heißt für alle $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. (1)

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$. Dann gibt es kein $k \in \mathbb{N}$ mit $f(k) = 1$, da 1 nach Peano kein Nachfolger einer natürlichen Zahl ist. (1)

(c) Sei $z \in Z$ beliebig. Da g surjekiv ist existiert $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjekiv ist existiert $x \in X$ mit $f(x) = y$. Dann gilt $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Somit ist h surjektiv. (2)

(d) Sei

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1 \qquad \text{und}$$
$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} n - 1 & \text{, falls } n \neq 1 \\ 1 & \text{, falls } n = 1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$(g \circ f)(n) = g(\underbrace{n + 1}_{\geq 2}) = (n + 1) - 1 = n$$

Somit ist $g \circ f$ surjektiv. (1)

A 7. [11 Punkte]

Berechnen Sie die folgenden Integrale und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

(a) $\displaystyle\int \left(\cos(2x) + \frac{4}{x^3} \right) \mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int 1 \cdot (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ für $x > 0$ mit der Substitution $u = \sqrt{x}$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x - 8}{x(x^2 + 4)} \, \mathrm{d}x$.

Lösung:

(a) Man rechnet direkt nach, dass

$$\int \left(\cos(2x) + \frac{4}{x^3} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{2}{x^2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

(b) Mittels zweimaliger partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x &= x \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \cdot (\ln x)^2 - \int 2 \ln x \, \mathrm{d}x \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2x \ln x + \int 2x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \ln x + \int 2 \, \mathrm{d}x \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad (3)
\end{aligned}$$

(c) Für $u = \sqrt{x}$ gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u}$. Damit erhalten wir

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\sqrt{x}} = \int 2 - \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u\Big|_{u=\sqrt{x}}$$
$$= 2u - 2\ln(1+u) + c\Big|_{u=\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

(d) Zunächst führen wir die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+4} = \frac{x-8}{x(x^2+4)} \iff ax^2 + 4a + bx^2 + cx = x - 8 \iff a = -2, b = 2, c = 1 \quad (2)$$

Damit erhalten wir

$$\int \frac{x-8}{x(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x+1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$
$$= -2\ln(x) + \int \frac{1}{x^2+4}\cdot 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -2\ln(x) + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

A 8. [4 Punkte]

(a) Geben Sie eine Parametrisierung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ derjenigen spiralförmigen Kurve an, welche auf der Kegelfläche $z = \sqrt{x^2+y^2}$ liegt und die in $(0,0,0)^T$ beginnt, sich genau zwei mal gegen den Uhrzeigersinn dreht und in $(2\pi, 0, 2\pi)^T$ endet (siehe Abbildung 1).

(b) Begründen Sie, warum die Parametrisierung γ in allen $t \in [0,1]$ differenzierbar ist.

(c) Bestimmen Sie die Werte $t \in [0,1]$, in denen die Parametrisierung γ regulär ist.

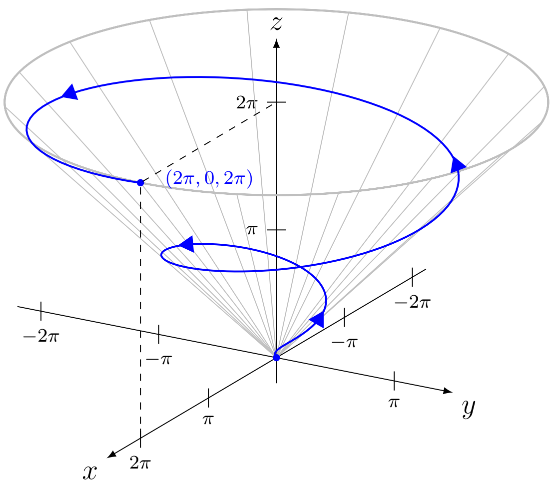


Abbildung 1: Kurve aus Teilaufgabe **(b)**.

Lösung:

(a) Da sich die Kurve gegen den Uhrzeigersinn dreht und der Kegel eine Kreisförmige Querschnittfläche hat besitzt γ die Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cdot \cos(p \cdot t + t_0) \\ r(t) \cdot \sin(p \cdot t + t_0) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

mit reellen Funktionen $r : [0, 1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z : [0, 1] \to \mathbb{R}$. .

Da $z(t)$ gleichmäßig wächst, gilt $z(t) = 2\pi t$.

Weiterhin folgt $r(t) = z(t) = 2\pi t$ aus $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Da γ zwei Umdrehungen vollführt gilt $p = 4\pi$. Damit folgt $t_0 = 0$ aus $\gamma(1) = (2\pi, 0, 2\pi)^T$ (als eine mögliche Lösung). Daher ist die Funktion $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\pi t \cdot \cos(4\pi t) \\ 2\pi t \cdot \sin(4\pi t) \\ 2\pi t \end{pmatrix}.$$ 2

(b) Da die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die lineare Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 2\pi t$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto 4\pi t$ differenzierbar sind, ist auch die Verknüpfung dieser Funktionen stetig. Daher sind die Koordinatenfunktionen von γ differenzierbar und somit auch γ. 1

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \left\| \begin{pmatrix} 2\pi\left(\cos(4\pi t) - 4\pi t \sin(4\pi t)\right) \\ 2\pi\left(\sin(4\pi t) + 4\pi t \cos(4\pi t)\right) \\ 2\pi \end{pmatrix} \right\| \\ &= 2\pi\sqrt{1 + 16\pi^2 t^2 + 1} = 2\pi\sqrt{2 + 16\pi^2 t^2} > 0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, 1]$. Somit sind alle $t \in [0, 1]$ regulär. 1

A 9. [5 Punkte] Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 2y^2 - 3xy + x^2 + 2y - x.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und klassifizieren Sie diese.

Lösung:
Notwendig ist die Bedingung $\nabla f(x,y) = 0$, d.h.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -3y + 2x - 1 \\ \\ 4y - 3x + 2 \end{pmatrix} = 0. \qquad 1$$

Dies ist ein LGS mit eindeutiger Lösung $x = 2$ und $y = 1$, d.h. das einzige potentielle Extremum liegt in $(2,1)^T$. 1

Für das hinreichende Kriterium betrachten wir die Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \qquad 1$$

Diese ist wegen $2 > 0$ und $\det H_f(1,2) = 8 - 9 = -1 < 0$ indefinit, es liegt also ein Sattelpunkt vor. 2

A 10. [10 Punkte]

(a) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y \;=\; \mathrm{e}^{-2x}. \qquad (**)$$

(i) Zeigen Sie, dass $(**)$ eine Lösung der Form $y(x) = c\mathrm{e}^{-2x}$ besitzt.

(ii) Bestimmen Sie alle rellen Lösungen der Differentialgleichung $(**)$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung

$$(x^4 + x^3)y' = y(x^2 - 1) \quad \text{für } x > 0.$$

Lösung:

(a) (i) Wir setzen $y(x) = c\mathrm{e}^{-2x}$ in $(**)$ ein:

$$\begin{aligned} 16c\mathrm{e}^{-2x} + 3 \cdot (4c\mathrm{e}^{-2x}) - 4 \cdot (c\mathrm{e}^{-2x}) \;&=\; 24c\mathrm{e}^{-2x} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{-2x} \\ \iff \quad c = \frac{1}{24} & \end{aligned}$$

Damit ist $y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x}$ eine Lösung von $(**)$. 2

(ii) Hierzu lösen wir die homogene Differentialgleichung lautet $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$. Der Ansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ liefert

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4) = 0\ .$$

Hieraus folgt $\lambda^2 = 1$ oder $\lambda^2 = -4$ und damit erhält man die Lösungen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2\mathrm{i}$ und $\lambda_4 = -2\mathrm{i}$. 2

Die allgemeine homogene, reelle Lösung lautet somit

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\cos(2x) + c_3\sin(2x), \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$$ 1

Hiermit ergibt sich die allgemeine reelle Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x) \\ &= c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\cos(2x) + c_3\sin(2x) + \frac{1}{24}\mathrm{e}^{-2x}, \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$ 1

(b) Eine spezielle Lösung ist $y(x) = 0$. 1

Sei also $y \neq 0$, dann liefert Separation der Variablen

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{x^2-1}{x^4+x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$$ 1

$$\Leftrightarrow \qquad \ln|y| = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$ 1

$$\Leftrightarrow \qquad |y(x)| = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}} \cdot \mathrm{e}^{c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \qquad y(x) = d \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}}, \quad d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$ 1

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch $y(x) = d \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}}$ mit $d \in \mathbb{R}$.