Klausur zur Mathematik 1/2

für Informatikstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind nachvollziehbare Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–11** sind nur die Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.10.2020** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.10.2020** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte) Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 - 12x + (x-3)(y+3)^2 .$$

(a) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(b) Entscheiden Sie für jede Flachstelle von f, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Lösung.

(a) Es ist

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 12 + (y+3)^2 \\ 2(x-3)(y+3) \end{pmatrix} .$$

Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung $\nabla_f(x, y) = 0$.

Aus $2(x-3)(y+3) = 0$ folgt $x = 3$ oder $y = -3$.

Fall $x = 3$. Einsetzen in die erste Gleichung verlangt $0 = 27 - 12 + (y+3)^2 = 15 + (y+3)^2$. Wegen $(y+3)^2 \geqslant 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ liefert dieser Fall keine Flachstellen.

Fall $y = -3$. Einsetzen in die erste Gleichung verlangt $3x^2 - 12 = 0$. Dies liefert $x = 2$ oder $x = -2$. Wir erhalten also die Flachstellen $(2, -3)$ und $(-2, -3)$.

(b) Wir bestimmen zunächst die Hessematrix von f.

$$\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 2(y+3) \\ 2(y+3) & 2(x-3) \end{pmatrix}$$

Wir untersuchen die Flachstellen aus Teil (a).

Es ist $\mathrm{H}_f(2, -3) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit, also ist $(2, -3)$ eine Sattelstelle.

Es ist $\mathrm{H}_f(-2, -3) = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ negativ definit, also ist $(-2, -3)$ eine lokale Maximalstelle.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' \;=\; \mathrm{e}^{-y}$$

auf $\mathbb{R}_{>-1}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Lösung. Die Differentialgleichung $y' = \mathrm{e}^{-y}$ ist äquivalent zu

$$\mathrm{e}^{y} \cdot y' \;=\; 1\,.$$

Wir haben also die Gleichung

$$\int \mathrm{e}^{y} \cdot y' \, \mathrm{d}x \;=\; \int 1 \; \mathrm{d}x$$

zu lösen.

Einerseits wird $\int \mathrm{e}^{y} \cdot y' \, \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{y} \, \mathrm{d}y = [\mathrm{e}^{y}]$.

Andererseits wird $\int 1 \; \mathrm{d}x = [x]$.

Also ist $\mathrm{e}^{y} = x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Es folgt $y = y(x) = \ln(x + c)$.

Die Anfangsbedingung verlangt $0 \overset{!}{=} y(0) = \ln(0 + c) = \ln(c)$. Wir erhalten $c = 1$.

Somit ist

$$y \;=\; y(x) \;=\; \ln(x + 1)$$

die Lösung der Differentialgleichung $y' = \mathrm{e}^{-y}$ auf $\mathbb{R}_{>-1}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Probe. Es wird $y'(x) = \frac{1}{x+1}$. Es wird $\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^{-\ln(x+1)} = \frac{1}{x+1}$. Das ist dasselbe.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}AS = D$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$z'' = 4z' + 5z$$

auf $\mathbb{R}$ zu den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $z'(0) = 1$.

Lösung.

(a) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A.

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 5 & 4-X \end{pmatrix} = X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$$

Also erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$. Dies ergibt $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Zu $\lambda_1 = -1$. Es ist $A + \mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(1)$.

Zu $\lambda_2 = 5$. Es ist $A - 5\mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist $(\begin{pmatrix} 1/5 \\ 1 \end{pmatrix})$ und damit auch $(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(2)$.

Wir erhalten $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ mit $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

(b) Wir wollen $\exp(Ax)$ berechnen.

Aus $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\exp(Dx) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}$.

Es wird $S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Damit wird

$$\begin{aligned} \exp(Ax) &= S \cdot \exp(Dx) \cdot S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{5x} \\ \mathrm{e}^{-x} & 5\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{5x} & -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{5x} \\ -5\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{5x} & \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{5x} \\ -5\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{5x} \\ \mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}\right)$$

ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y' = Ay$.

Wegen $\exp(A\cdot 0) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ gibt Einsetzen von $x=0$ in das Fundamentalsystem die beiden Vektoren $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Für die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich also das lineare Gleichungssystem $c_1\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ mit Lösung $c_1 = 0$ und $c_2 = 1$.

Damit ist

$$y(x) \;=\; \tfrac{1}{6}\left(\begin{smallmatrix}-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{5x}\\ \mathrm{e}^{-x}+5\mathrm{e}^{5x}\end{smallmatrix}\right)$$

die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Alternativer Lösungsweg:

Es ist $S\cdot\exp(Dx) = \left(\begin{smallmatrix}-1&1\\1&5\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{e}^{-x}&0\\0&\mathrm{e}^{5x}\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-\mathrm{e}^{-x}&\mathrm{e}^{5x}\\\mathrm{e}^{-x}&5\mathrm{e}^{5x}\end{smallmatrix}\right)$.

Also ist $(\mathrm{e}^{-x}\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right), \mathrm{e}^{5x}\left(\begin{smallmatrix}1\\5\end{smallmatrix}\right))$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y' = Ay$.

Für die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ müssen wir nach Einsetzen von $x=0$ das lineare Gleichungssystem $c_1\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right) + c_2\left(\begin{smallmatrix}1\\5\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ lösen.

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\1&5&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\0&6&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1/6\\0&1&1/6\end{array}\right)$$

Damit ist $y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{6}\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right) + \frac{\mathrm{e}^{5x}}{6}\left(\begin{smallmatrix}1\\5\end{smallmatrix}\right)$ die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(c) Setzen wir $y = \left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix}z\\z'\end{smallmatrix}\right)$, dann wird die Differentialgleichung $z'' = 4z' + 5z$ zu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 4y_2 + 5y_1 \;. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, es entsteht das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\5&4\end{smallmatrix}\right) y = Ay$.

Nach Teil (b) ist die gesuchte Lösung zu den Anfangsbedingungen $z(0) = y_1(0) = 0$ und $z'(0) = y_2(0) = 1$ damit gegeben durch

$$z(x) \;=\; y_1(x) \;=\; \tfrac{1}{6}(-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{5x}) \;.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x$.

Lösung.

Wir faktorisieren $x^2-2x+2 \;=\; (x-1)^2+1 \;=\; (x-(1+\mathrm{i}))(x-(1-\mathrm{i}))$.

Zur Partialbruchzerlegung setzen wir

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2-2x+2)} \overset{!}{=} \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-(1+\mathrm{i})}+\frac{C}{x-(1-\mathrm{i})}$$

an. Multiplikation mit $(x-1)(x-(1+\mathrm{i}))(x-(1-\mathrm{i})$ ergibt

$$\begin{aligned} x^2 &\overset{!}{=} A(x^2-2x+2)+B(x-1)(x-(1-\mathrm{i}))+C(x-1)(x-(1+\mathrm{i})) \\ &= A(x^2-2x+2)+B(x^2-(2-\mathrm{i})x+(1-\mathrm{i}))+C(x^2-(2+\mathrm{i})x+(1+\mathrm{i}))\,. \end{aligned}$$

Nach Sortierung der Potenzen erhalten wir

$$x^2 \overset{!}{=} (A+B+C)x^2+(-2A+(-2+\mathrm{i})B+(-2-\mathrm{i})C)x+(2A+(1-\mathrm{i})B+(1+\mathrm{i})C)\,.$$

Koeffizientenvergleich führt auf folgendes lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \quad (\text{Koeffizient bei } x^2) \\ -2A+(-2+\mathrm{i})B+(-2-\mathrm{i})C &= 0 \quad (\text{Koeffizient bei } x^1) \\ 2A+(1-\mathrm{i})B+(1+\mathrm{i})C &= 0 \quad (\text{Koeffizient bei } x^0) \end{aligned}$$

Dieses lösen wir wie folgt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2+\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & 0 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 2 \\ 0 & -1-\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mathrm{i} & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \end{array}\right)$$

Also ist $A=1$, $B=-\mathrm{i}$ und $C=\mathrm{i}$.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}+\frac{\mathrm{i}}{x-(1-\mathrm{i})}-\frac{\mathrm{i}}{x-(1+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(|x-1|)-2\arctan\left(\frac{x-1}{-1}\right)\right] \\ &= \left[\ln(|x-1|)+2\arctan(x-1)\right]. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte) Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A. Es ist

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 5-X & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 1-X & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -X & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3-X \end{pmatrix} = -X(3-X)\det \begin{pmatrix} 5-X & -2 \\ 2 & 1-X \end{pmatrix}$$
$$= X(X-3)(X^2-6X+9) = X(X-3)^3.$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 3$.

Dabei ist $\mathrm{aV}_A(0) = 1$ und $\mathrm{aV}_A(3) = 3$.

Zu $\lambda_1 = 0$. Es ist $A_{(1)} = A - 0\mathrm{E}_4 = A$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\mathrm{H}_A(0) = \mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}) = \langle \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.

Wir erhalten zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ eine Hauptvektorkette der Länge 1.

$$(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right))$$

Zu $\lambda_2 = 3$. Es ist $A_{(2)} = A - 3\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\mathrm{E}_A(2) = \mathrm{Kern}(A_{(2)}) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

$$A_{(2)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen die Basis von $\mathrm{E}_A(2)$ zu einer Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ von $\mathrm{Kern}(A_{(2)}^2) = \mathrm{H}_A(2)$.

Gesucht ist eine Basis aus Hauptvektorketten. Dazu setzen wir $y_{2,1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$A_{(2)} y_{2,1} = A_{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir ergänzen $A_{(2)} y_{2,1}$ mit $y_{1,1} := \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathrm{E}_A(2)$.

Damit erhalten wir eine Hauptvektorkette der Länge 2 und eine der Länge 1.

$$(A_{(2)} y_{2,1}, y_{2,1})$$
$$(y_{1,1})$$

Also ist $S := \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -8 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix mit $J = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3k+1}}$.

(b) Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{\ln(k)}$ konvergent? Ist sie absolut konvergent?

Sie dürfen $\ln(k) \leqslant k$ für $k \geqslant 2$ verwenden.

Lösung.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3k+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3k+1}} - \frac{1}{2} &&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot (2^3)^k} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^k - 1\right) &&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9} - 1\right) &&= -\frac{1}{18}\,.\end{aligned}$$

(b) Wir benutzen das Leibniz-Kriterium, um die Konvergenz der Reihe nachzuweisen. Dieses können wir anwenden, da alle drei Bedingungen des Kriteriums erfüllt sind.

- In der Folge $\left((-1)^k \frac{4}{\ln(k)}\right)_{k \geqslant 2}$ haben die Elemente abwechselndes Vorzeichen.
- Es gilt $|(-1)^{k+1} \frac{4}{\ln(k+1)}| \leqslant |(-1)^k \frac{4}{\ln(k)}|$ für $k \geqslant 2$.
- Es ist $\lim_{k\to\infty} |(-1)^k \frac{4}{\ln(k)}| = 0$.

Damit ist die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{4}{\ln(k)}$ konvergent.

Wir untersuchen die Reihe auf absolute Konvergenz.

Dazu müssen wir die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} |(-1)^k \frac{4}{\ln(k)}| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{\ln(k)}$ auf Konvergenz untersuchen.

Für $k \geqslant 2$ ist $\dfrac{4}{\ln(k)} \geqslant \dfrac{4}{k}$.

Angenommen, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{\ln(k)}$ ist konvergent. Dann ist dies eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k}$. Folglich konvergiert diese Reihe. Da aber die harmonische Reihe nicht konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{k}$ nicht. Wir haben einen *Widerspruch.*

Da also $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4}{\ln(k)}$ nicht konvergent ist, ist die ursprüngliche Reihe $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{4}{\ln(k)}$ nicht absolut konvergent.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ von Grad 3.

$$X^3 + X^2 + 1, \qquad X^3 + X + 1$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 5y \\ 4y \end{pmatrix}.$$

Sei $B := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Sei $C := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ die Standardbasis und $D := (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von f bezüglich C und B, sowie die beschreibende Matrix von id bezüglich C und D.

$${}_C f_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad {}_C \mathrm{id}_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von id bezüglich D und C, sowie die beschreibende Matrix von f bezüglich D und B.

$${}_D \mathrm{id}_C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}_D f_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 30 & -26 \\ -12 & 12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ bezüglich D.

$${}_D f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

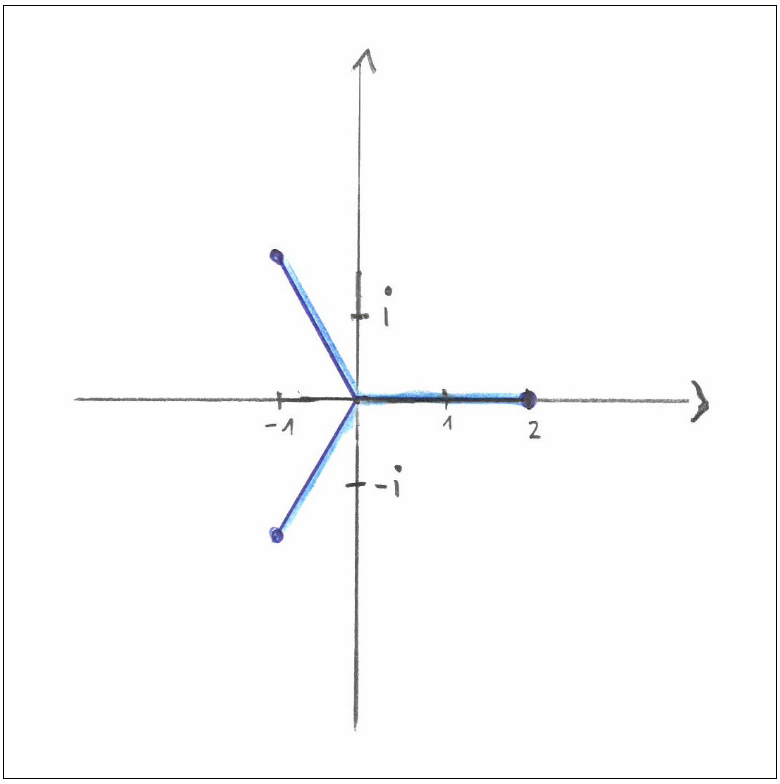
Aufgabe 9 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{ (x, y) \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \ : \ x \cdot y = 1 \} \ = \ \boxed{\{(1,1),(3,7),(7,3),(9,9)\}}$

(b) $\{ x \in \mathbb{F}_7 \ : \ x^2 + x + 1 = 0 \} \ = \ \boxed{\{2,4\}}$

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Menge $\{ z \in \mathbb{C} \ : \ z^3 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \wedge |z| \leqslant 2 \}$ in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 11 (2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle \lim_{x \to -5} \frac{\sqrt{x^2 - 16} - 3}{x + 5} = \boxed{-\frac{5}{3}}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{\sin(x \ln(9))}{2x}\right) = \boxed{3}$