Klausur zur Mathematik 1/2

für Informatikstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–6** sind nachvollziehbare Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 7–11** sind nur die Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **01.04.2021** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **15.04.2021** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi^2-3}}^{\sqrt{4\pi^2-3}} \frac{x\sin(\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Wir verwenden die Substitution $u(x)=\sqrt{x^2+3}$ mit Ableitung $u'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Es wird $u(\sqrt{\pi^2-3})=\sqrt{\pi^2-3+3}=\pi$. Es wird $u(\sqrt{4\pi^2-3})=\sqrt{4\pi^2-3+3}=2\pi$.

Somit wird

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{\pi^2-3}}^{\sqrt{4\pi^2-3}} \frac{x\sin(\sqrt{x^2+3})}{\sqrt{x^2+3}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sqrt{\pi^2-3}}^{\sqrt{4\pi^2-3}} \sin(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\pi}^{2\pi}\sin(u)\,\mathrm{d}u\\ &= [-\cos(u)]_{\pi}^{2\pi}\\ &= -\cos(2\pi)-(-\cos(\pi))\\ &= -2.\end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen das Integral mit Hilfe zweifacher partieller Integration.

$$\begin{aligned}\int (x^2+2x+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \left[(x^2+2x+1)\mathrm{e}^x\right]-\int(2x+2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[(x^2+2x+1)\mathrm{e}^x\right]-\left([(2x+2)\mathrm{e}^x]-\int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \left[(x^2+2x+1)\mathrm{e}^x\right]-[(2x+2)\mathrm{e}^x]+[2\mathrm{e}^x]\\ &= \left[(x^2+1)\mathrm{e}^x\right]\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Gegeben sind die Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y(2 - x^2) - 2(y - 1)^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -x^2 + y^2 + 8x - 13$.

(a) Berechnen Sie die Gradienten ∇_f und ∇_g. Berechnen Sie die Hessematrizen H_f und H_g.

(b) Zeigen Sie, dass $(2,\, 1) \in \mathbb{R}^2$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Entscheiden Sie, ob $(2,\, 1)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Lösung.

(a) Es ist

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy \\ 6 - 4y - x^2 \end{pmatrix}, \quad \nabla_g(x,y) = \begin{pmatrix} -2x + 8 \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}_g(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir zeigen, dass $(2,\, 1)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Es gilt $g(2,\, 1) = -2^2 + 1^2 + 8 \cdot 2 - 13 = 0$.

Es hat $N(2,1) = \nabla_g(2,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ den Rang 1.

Wir untersuchen, ob es $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ mit $\nabla_f(2,1) = \lambda_1 \nabla_g(2,1)$ gibt. Tatsächlich ist

$$\nabla_f(2,1) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1)\nabla_g(2,1).$$

Damit ist $\lambda_1 = -1$.

Wir untersuchen, ob die Flachstelle $(2,1)$ eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle unter Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Der Lösungsraum

$$\{u \in \mathbb{R}^{2\times 1} : N(2,1)^{\mathrm{t}}\, u = 0\} \;=\; \{u \in \mathbb{R}^{2\times 1} : \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \end{smallmatrix}\right) u = 0\} \;=\; \{u \in \mathbb{R}^{2\times 1} : \left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) u = 0\}$$

hat die Basis $\left(\left(\begin{smallmatrix} -1/2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ und damit auch die Basis $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Wir erhalten die Matrix $U := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Weiter bilden wir

$$H := \mathrm{H}_f(2,1) - \lambda_1 \mathrm{H}_g(2,1) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit bestimmen wir die zu untersuchende Matrix.

$$U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (4)$$

Diese 1×1-Matrix ist positiv definit.

Also ist $(2,1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{3}{y}$$

auf $\mathbb{R}_{>-\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Lösung. Die Differentialgleichung $y' = \frac{3}{y}$ ist äquivalent zu

$$y \cdot y' = 3$$

Wir haben also die Gleichung

$$\int y \cdot y' \,\mathrm{d}x = \int 3 \,\mathrm{d}x$$

zu lösen.

Einerseits wird $\int y \cdot y' \,\mathrm{d}x = \int y \,\mathrm{d}y = [\frac{1}{2}y^2]$.

Andererseits wird $\int 3 \,\mathrm{d}x = [3x]$.

Also ist $\frac{1}{2}y^2 = 3x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Es folgt $y = y(x) = \sqrt{2(3x+c)}$ oder $y = y(x) = -\sqrt{2(3x+c)}$.
Die Anfangsbedingung $y(0) \stackrel{!}{=} 2$ verlangt das positive Vorzeichen und dann $2 \stackrel{!}{=} y(0) = \sqrt{2c}$. Wir erhalten $c = 2$.

Somit ist

$$y = y(x) = \sqrt{2(3x+2)} = \sqrt{6x+4}$$

die Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{3}{y}$ auf $\mathbb{R}_{>-\frac{1}{2}}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Probe. Es gilt $y'(x) = \frac{6}{2\sqrt{6x+4}} = \frac{3}{\sqrt{6x+4}} = \frac{3}{y}$ und $y(0) = \sqrt{4} = 2$.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $S^{-1}AS = D$.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

auf $\mathbb{R}$ zur Anfangsbedingung $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$z'' = 2z' + 8z$$

auf $\mathbb{R}$ zu den Anfangsbedingungen $z(0) = 2$ und $z'(0) = 2$.

Lösung.

(a) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von A.

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1 \\ 8 & 2-X \end{pmatrix} = X^2 - 2X - 8 = (X+2)(X-4)$$

Also erhalten wir die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$.

Zu $\lambda_1 = -2$. Es ist $A + 2\mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist $(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix})$ und damit auch $(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(-2)$.

Zu $\lambda_2 = 4$. Es ist $A - 4\mathrm{E}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist $(\begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix})$ und damit auch $(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix})$ eine Basis von $\mathrm{E}_A(4)$.

Wir erhalten $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ mit $S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} =: D$.

(b) Wir wollen $\exp(Ax)$ berechnen.

Aus $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\exp(Dx) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}$.

Es wird $S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Damit wird

$$\begin{aligned} \exp(Ax) &= S \cdot \exp(Dx) \cdot S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ 2\mathrm{e}^{-2x} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{4x} & -\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{4x} \\ -8\mathrm{e}^{-2x}+8\mathrm{e}^{4x} & 2\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{4x} \\ -8\mathrm{e}^{-2x}+8\mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix},\ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{4x} \\ 2\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{4x} \end{pmatrix}\right)$$

ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y' = Ay$.

Wegen $\exp(A \cdot 0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gibt Einsetzen von $x = 0$ in das Fundamentalsystem die beiden Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Für die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt sich also das lineare Gleichungssystem $c_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ mit Lösung $c_1 = 2$ und $c_2 = 2$.

Damit ist

$$y(x) \;=\; 2 \cdot \tfrac{1}{6} \left(\begin{smallmatrix} 4\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{4x} \\ -8\mathrm{e}^{-2x}+8\mathrm{e}^{4x} \end{smallmatrix}\right) + 2 \cdot \tfrac{1}{6} \left(\begin{smallmatrix} -\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{4x} \\ 2\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{4x} \end{smallmatrix}\right) \;=\; \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{4x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{4x} \end{smallmatrix}\right)$$

die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Alternativer Lösungsweg:

Es ist $S \cdot \exp(Dx) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{4x} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{4x} \\ 2\mathrm{e}^{-2x} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{smallmatrix}\right)$.

Also ist $(\mathrm{e}^{-2x} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \mathrm{e}^{4x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right))$ ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y' = Ay$.

Für die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ müssen wir nach Einsetzen von $x = 0$ das lineare Gleichungssystem $c_1 \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + c_2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ lösen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist $y(x) = -\mathrm{e}^{-2x} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{e}^{4x} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{4x} \\ -2\mathrm{e}^{-2x}+4\mathrm{e}^{4x} \end{smallmatrix}\right)$ die Lösung zur Anfangsbedingung $y(0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Setzen wir $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} z \\ z' \end{smallmatrix}\right)$, dann wird die Differentialgleichung $z'' = 2z' + 8z$ zu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 2y_2 + 8y_1 \; . \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, es entsteht das lineare Differentialgleichungssystem $y' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{smallmatrix}\right) y = Ay$.

Nach Teil (b) ist die gesuchte Lösung zu den Anfangsbedingungen $z(0) = y_1(0) = 2$ und $z'(0) = y_2(0) = 2$ damit gegeben durch

$$z(x) \;=\; y_1(x) \;=\; \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{4x} \; .$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) Gegeben ist die folgende Matrix.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ so, dass $J := S^{-1} \cdot A \cdot S$ eine Jordansche Normalform von A ist. Geben Sie J an.

Lösung. Wir berechnen zuerst die Eigenwerte von A. Es ist

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} 4-X & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6-X & -4 & -12 \\ 2 & 1 & 2-X & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-X \end{pmatrix} = (4-X)^2 \det \begin{pmatrix} 6-X & -4 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix}$$
$$= (X-4)^2(X^2 - 8X + 16) = (X-4)^4.$$

Der einzige Eigenwert von A ist also $\lambda_1 = 4$.

Dabei ist $\mathrm{aV}_A(4) = 4$.

Zu $\lambda_1 = 4$. Es ist $A_{(1)} = A - 4\mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\mathrm{E}_A(4) = \mathrm{Kern}(A_{(1)}) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

$$A_{(1)}^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen unsere Basis von $\mathrm{Kern}(A_{(1)})$ zur Basis $(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$ von $\mathrm{Kern}(A_{(1)}^2)$.

$$A_{(1)}^3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir ergänzen unsere Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)}^2)$ zur Basis $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ des Hauptraums $\mathrm{H}_A(4) = \operatorname{Kern}(A_{(1)}^3) = \mathbb{Q}^{4\times 1}$.

Gesucht ist eine Jordanbasis, d.h. eine Basis aus Hauptvektorketten. Dazu setzen wir $y_{3,1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist

$$
\begin{aligned}
A_{(1)} y_{3,1} &= A_{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
A_{(1)}^2 y_{3,1} &= A_{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Wir ergänzen $A_{(1)}^2 y_{3,1}$ mit $y_{1,1} := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\operatorname{Kern}(A_{(1)})$.

Damit erhalten wir eine Hauptvektorkette der Länge 3 und eine der Länge 1:

$$
\begin{aligned}
&(A_{(2)}^2 y_{3,1}, A_{(2)} y_{3,1}, y_{3,1}) \\
&(y_{1,1})
\end{aligned}
$$

Also ist $S := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix mit $J = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k$.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{k!}$.

Lösung.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\\ &= -1+\frac{2}{3}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\\ &= -1+\frac{2}{3}+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}\\ &= -\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\\ &= \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg. Es wird

$$\textstyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k = \left(-\frac{2}{3}\right)^2\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{\ell} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{15}.$$

(b) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{k!} = 2\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\right) = 2\mathrm{e}^2.$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:**

Aufgabe 7 (2 Punkte)

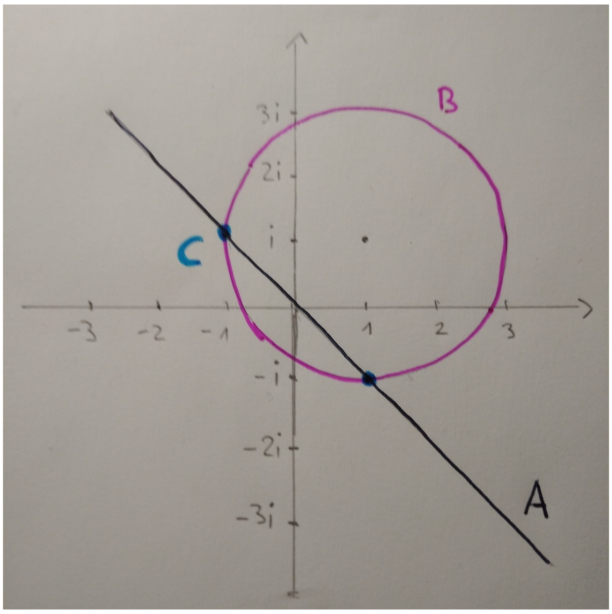
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(4x)+x^4-1} = \boxed{-\frac{1}{8}}$

(b) $\lim_{x\to 2} \cos\left(\frac{\pi \ln(\frac{x}{2})}{2x-4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Skizzieren Sie die Mengen $A := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| = |z+\mathrm{i}| \,\}$, $B := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z-(1+\mathrm{i})| = 2 \,\}$ und $C := A \cap B$ in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 9 (2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Mengen.

(a) $\{\, (x,y) \in (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \,:\, x \cdot y = 0 \,\} = \boxed{\{(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)\}}$

(b) $\{\, x \in \mathbb{F}_4 \,:\, x^2+x+1 = 0 \,\} = \boxed{\{\alpha,\ \alpha+1\}}$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 10 (4 Punkte) Gegeben ist die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{F}_5^{3\times 1} \to \mathbb{F}_5^{2\times 1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ -x - 2z \end{pmatrix}.$$

Sei $B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ die Standardbasis von $\mathbb{F}_5^{3\times 1}$.
Sei $C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ die Standardbasis und $D := \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{F}_5^{2\times 1}$.

(a) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von f bezüglich C und B.

$${}_C f_B = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

(b) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von id bezüglich C und D, sowie die beschreibende Matrix von id bezüglich D und C.

$${}_C \operatorname{id}_D = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}} \qquad {}_D \operatorname{id}_C = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen Sie die beschreibende Matrix von f bezüglich D und B.
Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ bezüglich D.

$${}_D f_B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \qquad {}_D f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11 (3 Punkte) Zerlegen Sie $c(X) := X^3 - \frac{5}{2}X^2 + 3X - 1 \in \mathbb{C}[X]$ in Faktoren von Grad 1.

$$c(X) = \boxed{\left(X - \tfrac{1}{2}\right)(X - (1 + \mathrm{i}))(X - (1 - \mathrm{i}))}$$