Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 18.10.2021 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **25.10.2021** bis **27.10.2021** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*4 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \sqrt{n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{n!}}$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(3^n - 1)z^n$ und stellen Sie f innerhalb ihrer Konvergenzkreisscheibe als gebrochen-rationale Funktion in z dar.

Aufgabe 3 (*5 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$g : (-1,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^{g(x)} + 7x.$$

(a) Ist g in $x_0 = 0$ stetig?

(b) Bestimmen Sie $g'(x)$ für $x \neq 0$ sowie $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist, indem Sie den Differentialquotienten bestimmen.

Aufgabe 4 (*9 Punkte*)
Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \binom{x}{y} \mapsto (x^2 + 4y^2 - 9)(3 - 2y)$.

(a) Skizzieren Sie die Niveaumenge von f zum Niveau 0.
Markieren Sie in Ihrer Skizze die Bereiche, in denen f nur positive Werte annimmt, mit "$\oplus$" und die Bereiche, in denen f nur negative Werte annimmt, mit "$\ominus$".

(b) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f.
Entscheiden Sie für jede kritische Stelle, welcher Typ (Sattelpunkt, lokales Maximum/Minimum) dort vorliegt.

Aufgabe 5 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

sowie die mittels

$$C : \left[0, \ln(\sqrt{3})\right] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisierte Kurve K.

(a) Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^{2t}} \,\mathrm{d}\,t$.

(b) Bestimmen Sie $C'(t)$.

(c) Bestimmen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_K f(s) \,\mathrm{d}\,s$.

Aufgabe 6 (*5 Punkte*) Gegeben sei die reelle 3×3-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A den zugehörigen Eigenraum.

Aufgabe 7 (*8 Punkte*) Für eine reelle Zahl t mit $t > 0$ sei die Quadrik $\mathcal{Q}_t$ definiert durch

$$\mathcal{Q}_t := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + 2tx_1x_2 + x_2^2 + t = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t eine euklidische Normalform und die Gestalt von $\mathcal{Q}_t$.
Geben Sie auch ein kartesisches Koordinatensystem an, in dem diese Normalform angenommen wird.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Es sei $z = 2\mathrm{i} - 2$.

(a) Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

$|z| = \boxed{}$ $\qquad \varphi = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $w^3 = z$. Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

Aufgabe 9 (*3 Punkte*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \det \begin{pmatrix} \sqrt[n]{5} & 5 \\ \sqrt[n]{5} & \sqrt[n]{5} \end{pmatrix} = \boxed{}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2+1} \left| \begin{pmatrix} 3n \\ 2n^2 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} \right| = \boxed{}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Sp} \begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n & (1+\ln(n))^n \\ \left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)^n & 0 \end{pmatrix} = \boxed{}$

Aufgabe 10 (*5 Punkte*)

(a) Berechnen Sie: $\displaystyle\int t \sin(\pi t)\,\mathrm{d}\,t =$

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \int\limits_1^x t \sin(\pi t)\,\mathrm{d}\,t$. Bestimmen Sie für f die erste und die zweite Ableitung, sowie das Taylorpolynom $T_2(f, x, 4)$ der zweiten Stufe um den Entwicklungspunkt 4.

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$T_2(f, x, 4) =$

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben sei die reelle 4×4-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & -8 \\ 1 & -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Rang von A.

$$\mathrm{Rg}(A) = \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

$$\mathcal{L} = \boxed{}$$

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Gegeben seien drei Punkte $P = (1,0,0)^\intercal$, $Q = (0,1,0)^\intercal$ und $W = (0,0,2)^\intercal$ in $\mathbb{R}^3$. Sei E die Ebene, die die Punkte P, Q und W enthält.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E.

(b) Bestimmen Sie das Vektorprodukt $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PW}$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PW} = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebene E.
