

Modulprüfung zur Höheren Mathematik 3 für el, el-mobi

Nachname, Vorname

Matrikelnummer

- ▶ Es gibt 7 Aufgaben mit insgesamt 40 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- ▶ Es sind keine Hilfsmittel außer 2 DIN A4 Seiten einseitig (oder 1 DIN A4 Seite doppelseitig) handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- ▶ In allen Aufgaben zählen Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier, versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und **beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.**
- ▶ Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- ▶ Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- ▶ Legen Sie alle Blätter, die Sie abgeben möchten, am Ende des Bearbeitungszeitraumes in das Umschlagblatt.
- ▶ Den Inhalt der folgenden Tabellen können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1 + \tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

- ▶ Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus. Viel Erfolg bei der Prüfung!

A 1. [5+1 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{zur Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die zugehörigen Hauptvektoren von A .
 (b) Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Lösung: (a) Das charakteristische Polynom lautet

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda),$$

wobei die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 3$ direkt abgelesen werden können. Versucht man nun die Eigenvektoren zu bestimmen, so erhält man durch Lösen von $(A - \lambda_j I)v_j = 0$ beispielsweise

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Hauptvektor v_2 wird bestimmt durch $(A - \lambda I)^2 v_2 = 0$ und $(A - \lambda I)v_2 = v_1$, damit erhält man:

$$(A - 2I)^2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \\ v_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (A - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \\ v_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für v_2 ergibt sich

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Die allgemeine, komplexe Lösung ist damit gegeben durch

$$y(x) = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \\ -x \end{pmatrix} + C_3 e^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}.$$

A 2. [1+3+1 Punkte] Wir betrachten die durch

$$u(x, y) = 2x + y + x^2 - y^2$$

gegebene Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Ist u harmonisch?

- (b) Wir identifizieren nun wie in der Vorlesung \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 und schreiben $z = x + iy$. Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v(0, 0) = 1$, so dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

holomorph auf ganz \mathbb{C} ist.

- (c) Schreiben Sie f als Funktion von z .

Lösung: (a) Ja, denn es ist

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = 2 - 2 = 0.$$

- (b) Bezüglich u muss v die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen erfüllen, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_y v(x, y) &= \partial_x u(x, y) = 2 + 2x, & \text{sowie} \\ \partial_x v(x, y) &= -\partial_y u(x, y) = -1 + 2y. \end{aligned}$$

Integration nach y bzw. x liefert dann die Gleichung

$$\int \partial_y v(x, y) dy = 2y + 2xy + C_1(x) \stackrel{!}{=} -x + 2xy + C_2(y) = \int \partial_x v(x, y) dx,$$

also $C_1(x) = -x + c$ und $C_2(y) = 2y + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und somit

$$v(x, y) = 2y + 2xy - x + c.$$

Da $v(0, 0) = c = 1$ gefordert war, folgt

$$v(x, y) = 2y + 2xy - x + 1.$$

- (c) Es gilt

$$\begin{aligned} u(x, y) + i v(x, y) &= x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy - ix + y + i \\ &= (x + iy)^2 + 2(x + iy) - i(x + iy) + i. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f(z) = z^2 + (2 - i)z + i.$$

- A 3. [2+2+3 Punkte]** Es sei M die Menge in der $z = 0$ Ebene, die durch die Hyperbel

$$h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 1, z = 0\}$$

und die Gerade

$$g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{5}, z = 0\}$$

eingeschlossen ist. In Abbildung 1 beschreibt die Kurve γ_1 das gerade Stück und γ_2 das hyperbolische Stück des Randes ∂M .

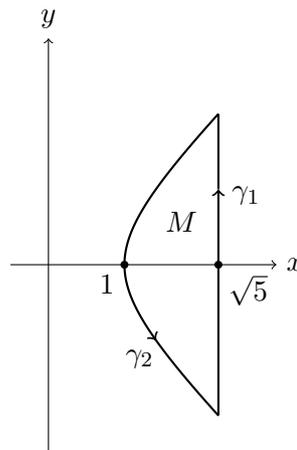


Abbildung 1: Die Menge M und die Kurven γ_1 und γ_2 in der $z = 0$ Ebene

Weiterhin sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $\int_M 2x \, dA,$

(b) $\int_{\gamma_1} v \cdot d\vec{s},$

(c) $\int_{\gamma_2} v \cdot d\vec{s}.$

Lösung: (a) Wir können die Menge M in der Ebene durch

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(-\sqrt{x^2 - 1} \leq y \leq \sqrt{x^2 - 1} \right) \wedge \left(1 \leq x \leq \sqrt{5} \right) \right\}$$

beschreiben. Damit folgt

$$\int_M 2x \, dA = \int_1^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} 2x \, dy \, dx = \int_1^{\sqrt{5}} 4x \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \left[\frac{4}{3} (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{32}{3}$$

(b) Wir parametrisieren die Kurve γ_1 durch $C_1 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\int_{\gamma_1} v \cdot d\vec{s} = \int_{-2}^2 v(C_1(t)) \cdot C_1'(t) \, dt = \int_{-2}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dt = 20.$$

(c) Wir parametrisieren die Kurve γ_2 durch $C_2 : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog zu (b) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} v \cdot \vec{ds} &= \int_{-2}^2 v(C_2(t)) \cdot C_2'(t) dt = \int_{-2}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{-2}^2 -1 - t^2 dt = \left[-t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{-2}^2 = -\frac{28}{3} \end{aligned}$$

A 4. [2+1+2 Punkte] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2+z}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f und die Potenzreihe der Ableitung f' jeweils mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.
- (b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe der Ableitung f' .
- (c) Bestimmen Sie das Residuum von f und f' in $z = -2$.

Lösung: (a) Wir entwickeln f in eine Potenzreihe und leiten dann die Potenzreihe von f ab. Mithilfe der geometrischen Reihe erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + (\frac{z}{2})} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{z}{2} \right)^j.$$

Ableiten liefert nun

$$f'(z) = \frac{-1}{(2+z)^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{j}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{j-1} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} (j+1) \left(\frac{z}{2} \right)^j.$$

- (b) Da der Abstand zum nächsten Pol 2 beträgt, ist der Konvergenzradius 2.
- (c) Die Residuen von f und f' in $z = -2$ kann man einfach ablesen. Da

$$f(z) = \frac{1}{2+z}, \quad f'(z) = \frac{-1}{(2+z)^2}$$

gilt, sind f und f' bereits als Laurentreihe dargestellt mit Entwicklungspunkt $z = -2$. Damit erhalten wir $\text{Res}(f, -2) = 1$ und $\text{Res}(f', -2) = 0$.

A 5. [1+4 Punkte] Gegeben seien die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1 \wedge 0 \leq 2x - 3y \leq 4\}.$$

und die Transformation $\varphi : M \rightarrow [0, 1] \times [0, 4]$ mit

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\det(\varphi'(x, y))$.

(b) Berechnen Sie

$$\int_M \sqrt{x+y} \, dV.$$

mit Hilfe der Transformationsformel für Volumenintegrale.

Lösung: (a) Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jacobimatrix von $\varphi(x, y)$. Es gilt

$$\det \varphi'(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -5.$$

(b) Um das Integral zu berechnen, verwenden wir den Transformationssatz und erhalten

$$\int_M \sqrt{x+y} \, dV = \int_{\varphi(M)} \sqrt{x(u, v) + y(u, v)} \cdot |\det(\varphi^{-1})'(u, v)| \, dV.$$

Aus (a) folgt

$$|\det(\varphi^{-1})'(u, v)| = \left| \frac{1}{\det \varphi'(x(u, v), y(u, v))} \right| = \frac{1}{5}.$$

Damit ergibt sich mit $u = x + y$ und $v = 2x - 3y$

$$\int_M \sqrt{x+y} \, dV = \int_0^4 \int_0^1 \frac{1}{5} \sqrt{u} \, du \, dv = \frac{4}{5} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

A 6. [2+3+1 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y \ln \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{y}{x} - y, \quad y > 0, x > 0.$$

(a) Verwenden Sie die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ um die obige Differentialgleichung in eine Differentialgleichung von $z(x)$ umzuschreiben.

(b) Lösen Sie die durch die Substitution entstandene Differentialgleichung.

(c) Nutzen Sie (b) um die ursprüngliche Differentialgleichung zum Anfangswert $y(1) = e^{1+e}$ zu lösen.

Lösung: (a) Die angegebene Substitution liefert

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} \quad \text{und damit} \quad y'(x) = xz'(x) + z(x)$$

und somit nach Einsetzen

$$xz'(x) + z(x) = y(x) \ln z(x) + z(x) - y(x), \quad \text{also} \quad z'(x) = z(x) \ln(z(x)) - z(x).$$

(b) Mit einem Separationsansatz und nachfolgender Substitution $\ln z = u$ im Integral erhalten wir für $z > 0, z \neq e$

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{z(\ln z - 1)} dz = x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow & \int \frac{1}{u - 1} du = x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow & \ln |u - 1| = x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\ \Leftrightarrow & u = 1 + Ce^x, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \Leftrightarrow & z = \exp(1 + Ce^x), \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Mit der konstanten Lösung $z = e$ erhalten wir zusammen

$$z(x) = \exp(1 + Ce^x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Die Rücksubstitution $y(x) = xz(x)$ liefert die allgemeine Lösung der Differentialgleichung als

$$y(x) = x \cdot \exp(1 + Ce^x).$$

Aus $y(1) = \exp(1 + Ce) \stackrel{!}{=} e^{1+e}$ folgt $C = 1$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = x \cdot \exp(1 + e^x).$$

A 7. [2+4 Punkte] Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und die Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Aus der Halbkugel H schneiden wir den Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 < (1 - z)^2\}$$

heraus. Den entstandenen Körper bezeichnen wir mit $M = H \setminus K$.

(a) Es sei B der Boden von M , also

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}.$$

Berechnen Sie den durch den Boden von M nach außen dringenden Fluss

$$\int_B v \cdot d\vec{A}.$$

(b) Wir bezeichnen den Rest der Oberfläche von M mit $D = \partial M \setminus B$, also

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z \leq 1, x^2 + y^2 = (1 - z)^2\}.$$

Berechnen Sie den durch den Rest der Oberfläche nach außen dringenden Fluss

$$\int_D v \cdot d\vec{A}.$$

Lösung: (a) Der Normalenvektor von B ist gegeben durch $(0, 0, -1)^T$. Damit ergibt sich

$$\int_B v \cdot d\vec{A} = \int_B -z \, dA = 0.$$

(b) Für die Divergenz ergibt sich $\operatorname{div}(v) = 3$, damit ergibt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} v \cdot d\vec{A} &= \int_M \operatorname{div}(v) \, dV \\ &= \int_H 3 \, dV - \int_K 3 \, dV \\ &= 3 \left(\frac{2}{3} \pi 2^3 - \frac{1}{3} \pi 1^2 \cdot 1 \right) \\ &= 16\pi - \pi = 15\pi. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_D v \cdot d\vec{A} = \int_{\partial M} v \cdot d\vec{A} - \int_B v \cdot d\vec{A} = 15\pi - 0 = 15\pi.$$