Modulprüfung zur Höheren Mathematik 3

für kyb, mecha, phys

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 10 Aufgaben mit insgesamt 60 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 2 DIN A4 Seiten einseitig (oder 1 DIN A4 Seite doppelseitig) handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In allen Aufgaben zählen Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier, versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und **beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt**.
- Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Legen Sie alle Blätter, die Sie abgeben möchten, am Ende des Bearbeitungszeitraumes in das Umschlagblatt.
- Den Inhalt der folgenden Tabellen können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(t)$	e^{kt}	$t^n\,e^{kt}$	$\cos kt$	$\sin kt$
$\mathcal{L}[f](\lambda)$	$\frac{1}{\lambda-k}$	$\frac{n!}{(\lambda-k)^{n+1}}$	$\frac{\lambda}{\lambda^2+k^2}$	$\frac{k}{\lambda^2+k^2}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus. Viel Erfolg bei der Prüfung!

A 1. [5+1 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die zugehörigen Hauptvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$.

A 2. [1+3+1 Punkte] Wir betrachten die durch

$$u(x, y) = 2x + y + x^2 - y^2$$

gegebene Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Ist u harmonisch?

(b) Wir identifizieren nun wie in der Vorlesung $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v(0, 0) = 1$, so dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

(c) Schreiben Sie f als Funktion von z.

A 3. [7 Punkte] Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2 + 1}\, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Wählen Sie dazu einen geeigneten geschlossenen Integrationsweg γ und begründen Sie insbesondere, weshalb $I = \oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie für den Integranden die Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{4z^2+1}$.

A 4. [1+4+1 Punkte] Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |\sin x|.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [-\pi, 2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

(c) Wogegen konvergiert die Fourierreihe für $x = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Hinweis zu (b): Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$2 \sin x \cos kx = \sin(1-k)x + \sin(1+k)x, \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$$

gilt.

A 5. [2+2+3 Punkte] Es sei M die Menge in der $z = 0$ Ebene, die durch die Hyperbel

$$h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 1,\ z = 0\}$$

und die Gerade

$$g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{5}, z = 0\}$$

eingeschlossen ist. In Abbildung 1 beschreibt die Kurve γ_1 das gerade Stück und γ_2 das hyperbolische Stück des Randes ∂M.

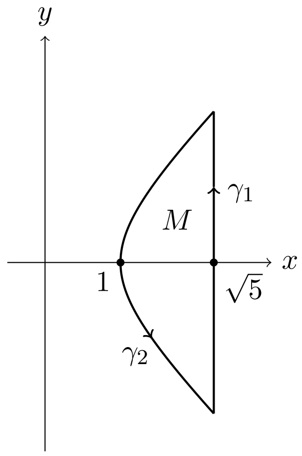

Abbildung 1: Die Menge M und die Kurven γ_1 und γ_2 in der $z = 0$ Ebene

Weiterhin sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_M 2x \,\mathrm{d}A$, **(b)** $\displaystyle\int_{\gamma_1} v \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, **(c)** $\displaystyle\int_{\gamma_2} v \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

A 6. [2+5 Punkte] Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 2y = 10\cos(x)$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

(a) Berechnen Sie die Laplacetransformierte der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

A 7. [2+1+2 Punkte] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2+z}.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f und die Potenzreihe der Ableitung f' jeweils mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe der Ableitung f'.

(c) Bestimmen Sie das Residuum von f und f' in $z = -2$.

A 8. [**1+4 Punkte**] Gegeben seien die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq 2x - 3y \leq 4\}.$$

und die Transformation $\varphi : M \to [0,1] \times [0,4]$ mit

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - 3y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\det(\varphi'(x, y))$.

(b) Berechnen Sie

$$\int_M \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}V$$

mit Hilfe der Transformationsformel für Volumenintegrale.

A 9. [2+3+1 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} - y, \qquad y > 0,\, x > 0.$$

(a) Verwenden Sie die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ um die obige Differentialgleichung in eine Differentialgleichung von $z(x)$ umzuschreiben.

(b) Lösen Sie die durch die Substitution entstandene Differentialgleichung.

(c) Nutzen Sie **(b)** um die ursprüngliche Differentialgleichung zum Anfangswert $y(1) = \mathrm{e}^{1+\mathrm{e}}$ zu lösen.

A 10. [2+4 Punkte] Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und die Halbkugel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\, z \geq 0\}.$$

Aus der Halbkugel H schneiden wir den Kegel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\, x^2 + y^2 < (1-z)^2\}$$

heraus. Den entstandenen Körper bezeichnen wir mit $M = H \setminus K$.

(a) Es sei B der Boden von M, also

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\, z = 0\}.$$

Berechnen Sie den durch den Boden von M nach außen dringenden Fluss

$$\int_B v \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

(b) Wir bezeichnen den Rest der Oberfläche von M mit $D = \partial M \setminus B$, also

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\, z > 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z \leq 1,\, x^2 + y^2 = (1-z)^2\}.$$

Berechnen Sie den durch den Rest der Oberfläche nach außen dringenden Fluss

$$\int_D v \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$