Modulprüfung zur Höheren Mathematik 3

für kyb, mecha, phys

Nachname, Vorname	Matrikelnummer

- Es gibt 10 Aufgaben mit insgesamt 60 Punkten. Die Bearbeitungszeit beträgt 180 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel außer 2 DIN A4 Seiten einseitig (oder 1 DIN A4 Seite doppelseitig) handbeschriebener Formelsammlung zugelassen.
- In allen Aufgaben zählen Rechenweg und Begründungen. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier, versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer und **beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt**.
- Aussagen aus Vorlesung und Übungen dürfen dabei verwendet werden, sofern sie nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Legen Sie alle Blätter, die Sie abgeben möchten, am Ende des Bearbeitungszeitraumes in das Umschlagblatt.
- Den Inhalt der folgenden Tabellen können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Zur Hilfe bieten wir Ihnen folgende Übersicht.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$1+\tan(x)^2$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$f'(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(t)$	e^{kt}	$t^n\,e^{kt}$	$\cos kt$	$\sin kt$
$\mathcal{L}[f](\lambda)$	$\frac{1}{\lambda-k}$	$\frac{n!}{(\lambda-k)^{n+1}}$	$\frac{\lambda}{\lambda^2+k^2}$	$\frac{k}{\lambda^2+k^2}$

- Füllen Sie zunächst die oben stehenden Kästchen aus. Viel Erfolg bei der Prüfung!

A 1. [5+1 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und die zugehörigen Hauptvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$.

Lösung: **(a)** Das charakteristische Polynom lautet

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2(3-\lambda),$$

wobei die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 3$ direkt abgelesen werden können. Versucht man nun die Eigenvektoren zu bestimmen, so erhält man durch Lösen von $(A - \lambda_j I)v_j = 0$ beispielsweise

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Hauptvektor v_2 wird bestimmt durch $(A - \lambda I)^2 v_2 = 0$ und $(A - \lambda I)v_2 = v_1$, damit erhält man:

$$(A - 2I)^2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \\ v_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad (A - 2I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2^{(1)} \\ v_2^{(2)} \\ v_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und für v_2 ergibt sich

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Die allgemeine, komplexe Lösung ist damit gegeben durch

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \\ -x \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}.$$

A 2. [1+3+1 Punkte] Wir betrachten die durch

$$u(x,y) = 2x + y + x^2 - y^2$$

gegebene Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Ist u harmonisch?

(b) Wir identifizieren nun wie in der Vorlesung $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Bestimmen Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $v(0,0) = 1$, so dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$$

holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

(c) Schreiben Sie f als Funktion von z.

Lösung: **(a)** Ja, denn es ist

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = 2 - 2 = 0.$$

(b) Bezüglich u muss v die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen erfüllen, d.h.

$$\begin{aligned} \partial_y v(x, y) &= \partial_x u(x, y) = 2 + 2x, \qquad \text{sowie} \\ \partial_x v(x, y) &= -\partial_y u(x, y) = -1 + 2y. \end{aligned}$$

Integration nach y bzw. x liefert dann die Gleichung

$$\int \partial_y v(x, y)\, \mathrm{d}y = 2y + 2xy + C_1(x) \stackrel{!}{=} -x + 2xy + C_2(y) = \int \partial_x v(x, y)\, \mathrm{d}x,$$

also $C_1(x) = -x + c$ und $C_2(y) = 2y + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und somit

$$v(x, y) = 2y + 2xy - x + c.$$

Da $v(0, 0) = c = 1$ gefordert war, folgt

$$v(x, y) = 2y + 2xy - x + 1.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) &= x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + 2\mathrm{i}y - \mathrm{i}x + y + \mathrm{i} \\ &= (x + \mathrm{i}y)^2 + 2(x + \mathrm{i}y) - \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$f(z) = z^2 + (2 - \mathrm{i})z + \mathrm{i}.$$

A 3. [7 Punkte] Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2 + 1}\, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Wählen Sie dazu einen geeigneten geschlossenen Integrationsweg γ und begründen Sie insbesondere, weshalb $I = \oint_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie für den Integranden die Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{4z^2+1}$.

Lösung: Wir wählen als geschlossenen Integrationsweg γ einen Halbkreis γ_R mit Radius $R > 0$ in der Halbebene $\operatorname{Im} z \geq 0$ verknüpft mit dem Streckenstück $[-R, R]$ auf der reellen Achse, d.h.

$$\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$$

und betrachten später dann den Grenzwert $R \to \infty$. Von den beiden Polen (d.h. Lösungen von $4z^2 = -1$)

$$z_{1/2} = \pm \frac{\mathrm{i}}{2}$$

der Funktion

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{4z^2 + 1}$$

aus dem Hinweis liegt nur $z_1 = \mathrm{i}/2$ in der oberen Halbebene und ist dabei ein Pol der Ordnung $N = 1$ mit zugehörigem Residuum

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to \frac{\mathrm{i}}{2}} \left(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{4\left(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(z + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{2}}}{4\left(\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{4\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{4\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Der Residuensatz liefert nun (beachte, dass Umlaufzahl $= 1$)

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}(f, z_1) = -2\pi\mathrm{i}\, \frac{\mathrm{i}}{4\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Wir zeigen nun, dass das Integral

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

für $R \to \infty$ verschwindet: In der Abschätzung

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma_R) \cdot \max_{z \in \gamma_R} \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{4z^2 + 1}\right|$$

schätzen wir den Nenner mit $|-4R^2 + 1| = 4R^2 - 1$ und den Zähler mit

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y}\right| = 1 \cdot \mathrm{e}^{-y} \leq 1,$$

da $y = \operatorname{Im} z \geq 0$ ist. Damit ergibt sich

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{\pi R}{4R^2 - 1} \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)\,.$$

Es folgt

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\mathrm{e}}} = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-R,R]} f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Auf der reellen Achse ist $z = x$ und damit

$$f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{4z^2 + 1} = \frac{\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)}{4x^2 + 1}.$$

Also folgt

$$I = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

A 4. [1+4+1 Punkte] Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |\sin x|.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \in [-\pi, 2\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

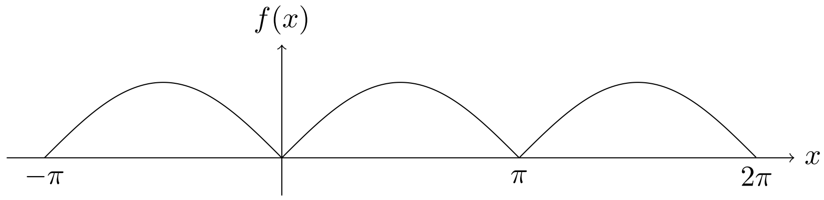
(c) Wogegen konvergiert die Fourierreihe für $x = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Hinweis zu (b): Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass

$$2\sin x \cos kx = \sin(1-k)x + \sin(1+k)x, \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$$

gilt.

Lösung: (a)



(b) Die reelle Fourierreihe ist gegeben durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Da $|\sin x|$ gerade ist, gilt $b_k = 0$. Die restlichen Koeffizienten bestimmen sich durch

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

Weiterhin gilt für $k = 1$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos^2(x)\right]_0^{\pi} = 0$$

und für $k > 1$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(1-k)x + \sin(1+k)x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-k}\cos(1-k)x + \frac{1}{1+k}\cos(1+k)x\right]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1-k} + \frac{1}{1+k}\right), & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(k-1)(k+1)}, & k \text{ gerade} \\ 0, & k \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Also ist die Fourierreihe gegeben durch

$$|\sin x| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\cos(2kx).$$

(c) Die Funktion f ist Lipschitz-stetig auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Also konvergiert die zugehörige Fourierreihe insbesondere für $x = 0$ gegen den Funktionswert $f(0) = 0$.

A 5. [2+2+3 Punkte] Es sei M die Menge in der $z = 0$ Ebene, die durch die Hyperbel

$$h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = 1,\ z = 0\}$$

und die Gerade

$$g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \sqrt{5}, z = 0\}$$

eingeschlossen ist. In Abbildung 1 beschreibt die Kurve γ_1 das gerade Stück und γ_2 das hyperbolische Stück des Randes ∂M.

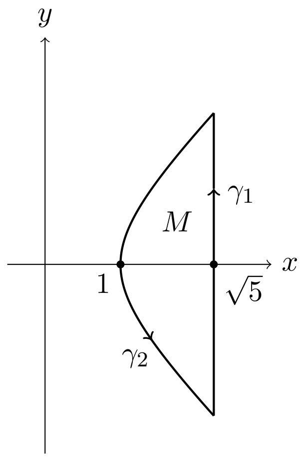


Abbildung 1: Die Menge M und die Kurven γ_1 und γ_2 in der $z = 0$ Ebene

Weiterhin sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\int_M 2x \, \mathrm{d}A$, **(b)** $\displaystyle\int_{\gamma_1} v \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, **(c)** $\displaystyle\int_{\gamma_2} v \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

Lösung: **(a)** Wir können die Menge M in der Ebene durch

$$M = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(-\sqrt{x^2 - 1} \le y \le \sqrt{x^2 - 1}\Big) \wedge \Big(1 \le x \le \sqrt{5}\Big)\Big\}$$

beschreiben. Damit folgt

$$\int_M 2x \, \mathrm{d}A = \int_1^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} 2x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{5}} 4x\sqrt{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\sqrt{5}} = \frac{32}{3}$$

(b) Wir parametrisieren die Kurve γ_1 durch $C_1 : [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\int_{\gamma_1} v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{-2}^{2} v(C_1(t)) \cdot C_1'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = 20.$$

(c) Wir parametrisieren die Kurve γ_2 durch $C_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog zu **(b)** erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} v \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{-2}^{2} v(C_2(t)) \cdot C_2'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-2}^{2} -1 - t^2 \,\mathrm{d}t = \left[-t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-2}^{2} = -\frac{28}{3} \end{aligned}$$

A 6. [2+5 Punkte] Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 2y = 10\cos(x)$$

mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

(a) Berechnen Sie die Laplacetransformierte der Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung: **(a)** Die Laplacetransformierte von $\cos$ lässt sich aus der Tabelle ablesen:

$$\mathcal{L}[\cos](\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}.$$

Wenden wir die Laplacetransformation auf die Differentialgleichung an so erhalten wir mit $Y(\lambda) = \mathcal{L}[y](\lambda)$

$$\lambda^2 Y(\lambda) - y(0)\lambda - y'(0) + \lambda Y(\lambda) - y(0) - 2Y(\lambda) = \frac{10\lambda}{\lambda^2+1}$$

und somit als Gleichung im Laplace-Bild

$$Y(\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = \frac{10\lambda}{\lambda^2+1} + 1.$$

(b) Wir formen die Gleichung aus **(a)** um und erhalten

$$Y(\lambda) = \frac{10\lambda}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+\lambda-2)} + \frac{1}{\lambda^2+\lambda-2}.$$

Wir wenden nun eine Partialbruchzerlegung an. Die Nullstellen von $\lambda^2 + \lambda - 2$ sind gegeben durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$. Damit ergibt sich

$$\frac{10\lambda}{(\lambda^2+1)(\lambda^2+\lambda-2)} + \frac{1}{\lambda^2+\lambda-2} = \frac{A}{\lambda-1} + \frac{B}{\lambda+2} + \frac{C\lambda+D}{\lambda^2+1}.$$

Multipliziert man nun mit $\lambda - 1$ durch so erhält man

$$\frac{\lambda^2 + 10\lambda + 1}{(\lambda^2+1)(\lambda+2)} = A + \frac{\lambda-1}{\lambda+2}B + \frac{\lambda-1}{\lambda^2+1}(C\lambda + D).$$

Betrachtet man nun $\lambda \to 1$, so ergibt sich

$$\frac{12}{6} = 2 = A.$$

Multiplizieren wir die ursprüngliche Gleichung mit $\lambda + 2$ so erhalten wir

$$\frac{\lambda^2 + 10\lambda + 1}{(\lambda^2+1)(\lambda-1)} = B + \frac{\lambda+2}{\lambda-1}A + \frac{\lambda+2}{\lambda^2+1}(C\lambda + D).$$

Betrachtet man nun $\lambda \to -2$, so ergibt sich

$$\frac{-15}{-15} = 1 = B.$$

Damit folgt $A = 2$ und $B = 1$. Setzen wir nun in die ursprüngliche Gleichung $\lambda = 0$, $A = 2$ und $B = 1$ ein, so erhalten wir

$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{D}{1}$$

und damit $D = 1$. Setzen wir nun $\lambda = 2$ in die ursprüngliche Gleichung, so erhalten wir mit $A = 2$ und $B = D = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{2^2 + 10\cdot 2 + 1}{(2^2+1)(2^2+2-2)} &= \frac{2}{2-1} + \frac{1}{2+2} + \frac{C\cdot 2 + 1}{2^2+1} \\
\frac{25}{20} &= 2 + \frac{1}{4} + \frac{2C}{5} + \frac{1}{5} \\
\frac{5}{4} - \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{5} &= \frac{2C}{5} \\
-6 &= 2C.
\end{aligned}$$

Damit folgt $C = -3$. Einsetzen der Koeffizienten liefert

$$Y(\lambda) = \frac{2}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda+2} + \frac{1-3\lambda}{\lambda^2+1}$$

und Rücktransformation von $Y(\lambda)$ mit Tabelle auf dem Aufgabenblatt somit

$$y(x) = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-2x} + \sin(x) - 3\cos(x).$$

A 7. [2+1+2 Punkte] Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{2+z}.$$

(a) Bestimmen Sie die Potenzreihe von f und die Potenzreihe der Ableitung f' jeweils mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe der Ableitung f'.

(c) Bestimmen Sie das Residuum von f und f' in $z = -2$.

Lösung: **(a)** Wir entwickeln f in eine Potenzreihe und leiten dann die Potenzreihe von f ab. Mithilfe der geometrischen Reihe erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\frac{z}{2})}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{z}{2}\right)^j.$$

Ableiten liefert nun

$$f'(z) = \frac{-1}{(2+z)^2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\frac{j}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{j-1} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}(j+1)\left(\frac{z}{2}\right)^j.$$

(b) Da der Abstand zum nächsten Pol 2 beträgt, ist der Konvergenzradius 2.
(c) Die Residuen von f und f' in $z=-2$ kann man einfach ablesen. Da

$$f(z) = \frac{1}{2+z}, \qquad f'(z) = \frac{-1}{(2+z)^2}$$

gilt, sind f und f' bereits als Laurentreihe dargestellt mit Entwicklungspunkt $z=-2$. Damit erhalten wir $\mathrm{Res}(f,-2)=1$ und $\mathrm{Res}(f',-2)=0$.

A 8. [1+4 Punkte] Gegeben seien die Menge

$$M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x+y \le 1 \ \wedge\ 0 \le 2x-3y \le 4\}.$$

und die Transformation $\varphi : M \to [0,1]\times[0,4]$ mit

$$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-3y \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Funktionaldeterminante $\det(\varphi'(x,y))$.

(b) Berechnen Sie

$$\int_M \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}V.$$

mit Hilfe der Transformationsformel für Volumenintegrale.

Lösung: **(a)** Die Funktionaldeterminante ist die Determinante der Jacobimatrix von $\varphi(x,y)$. Es gilt

$$\det\varphi'(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = -5.$$

(b) Um das Integral zu berechnen, verwenden wir den Transformationssatz und erhalten

$$\int_M \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}V = \int_{\varphi(M)} \sqrt{x(u,v)+y(u,v)}\cdot|\det(\varphi^{-1})'(u,v)|\,\mathrm{d}V.$$

Aus **(a)** folgt

$$|\det(\varphi^{-1})'(u,v)| = \left|\frac{1}{\det\varphi'(x(u,v),y(u,v))}\right| = \frac{1}{5}.$$

Damit ergibt sich mit $u=x+y$ und $v=2x-3y$

$$\int_M \sqrt{x+y}\,\mathrm{d}V = \int_0^4\int_0^1 \frac{1}{5}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{4}{5}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

A 9. [2+3+1 Punkte] Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} - y, \qquad y > 0,\, x > 0.$$

(a) Verwenden Sie die Substitution $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ um die obige Differentialgleichung in eine Differentialgleichung von $z(x)$ umzuschreiben.

(b) Lösen Sie die durch die Substitution entstandene Differentialgleichung.

(c) Nutzen Sie **(b)** um die ursprüngliche Differentialgleichung zum Anfangswert $y(1) = \mathrm{e}^{1+\mathrm{e}}$ zu lösen.

Lösung: (a) Die angegebene Substitution liefert

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} \qquad \text{und damit} \qquad y'(x) = xz'(x) + z(x)$$

und somit nach Einsetzen

$$xz'(x) + z(x) = y(x)\ln z(x) + z(x) - y(x), \qquad \text{also} \qquad z'(x) = z(x)\ln(z(x)) - z(x).$$

(b) Mit einem Separationsansatz und nachfolgender Substitution $\ln z = u$ im Integral erhalten wir für $z > 0$, $z \neq \mathrm{e}$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{z(\ln z - 1)}\,\mathrm{d}z = x + c, && c \in \mathbb{R},\\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{u-1}\,\mathrm{d}u = x + c, && c \in \mathbb{R},\\
\Leftrightarrow\quad & \ln|u-1| = x + c, && c \in \mathbb{R},\\
\Leftrightarrow\quad & u = 1 + C\mathrm{e}^x, && C \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\\
\Leftrightarrow\quad & z = \exp\left(1 + C\mathrm{e}^x\right), && C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

Mit der konstanten Lösung $z = \mathrm{e}$ erhalten wir zusammen

$$z(x) = \exp\left(1 + C\mathrm{e}^x\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Die Rücksubstitution $y(x) = xz(x)$ liefert die allgemeine Lösung der Differentialgleichung als

$$y(x) = x \cdot \exp\left(1 + C\mathrm{e}^x\right).$$

Aus $y(1) = \exp(1 + C\mathrm{e}) \overset{!}{=} \mathrm{e}^{1+\mathrm{e}}$ folgt $C = 1$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblemes

$$y(x) = x \cdot \exp\left(1 + \mathrm{e}^x\right).$$

A 10. [2+4 Punkte] Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und die Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}.$$

Aus der Halbkugel H schneiden wir den Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 < (1 - z)^2\}$$

heraus. Den entstandenen Körper bezeichnen wir mit $M = H \setminus K$.

(a) Es sei B der Boden von M, also

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}.$$

Berechnen Sie den durch den Boden von M nach außen dringenden Fluss

$$\int_B v \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

(b) Wir bezeichnen den Rest der Oberfläche von M mit $D = \partial M \setminus B$, also

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z > 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z \leq 1,\ x^2 + y^2 = (1 - z)^2\}.$$

Berechnen Sie den durch den Rest der Oberfläche nach außen dringenden Fluss

$$\int_D v \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

Lösung: **(a)** Der Normalenvektor von B ist gegeben durch $(0, 0, -1)^T$. Damit ergibt sich

$$\int_B v \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_B -z \,\mathrm{d}A = 0.$$

(b) Für die Divergenz ergibt sich $\operatorname{div}(v) = 3$, damit ergibt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} v \cdot \mathrm{d}\vec{A} &= \int_M \operatorname{div}(v) \,\mathrm{d}V \\
&= \int_H 3 \,\mathrm{d}V - \int_K 3 \,\mathrm{d}V \\
&= 3 \left(\frac{2}{3}\pi 2^3 - \frac{1}{3}\pi 1^2 \cdot 1 \right) \\
&= 16\pi - \pi = 15\pi.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_D v \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial M} v \cdot \mathrm{d}\vec{A} - \int_B v \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 15\pi - 0 = 15\pi.$$