Nachname:	Matrikelnr.:	Studiengang: ☐ wiwi ☐ winf ☐ t.o. bwl ☐ NF bau ☐ ______
Vorname:		

vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	**Summe**	Korrektor

Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Modul 100050 & 581201

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den **Aufgaben 1-6** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- In den **Aufgaben 7-13** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes abgegebene Blatt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos x$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 30. 09. 2021 über das Campus-System der Universität Stuttgart (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekannt gegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:**
  Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 5.11.2021 zu erfolgen.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 *(1+1=2 Punkte)*

(a) Gegeben sei die Funktion $f\colon D \to W\colon f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$ mit $D = \mathbb{R}^+$ und $W = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 2\}$.

Bestimmen Sie die Umkehrabbildung: $f^{-1}(x) = \boxed{\sqrt{\dfrac{1}{x-2}}}$

(b) Gegeben seien die Abbildungen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : g(x) = 1 + x^2$ und $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : h(x) = \ln(x)$.

Bestimmen Sie die Verkettung: $h \circ g(x) = \boxed{\ln\left(1 + x^2\right)}$

Aufgabe 2 *(2+1=3 Punkte)*

Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des von v_1, v_2, v_3 aufgespannten Spats in Abhängigkeit von λ.

$$\text{Volumen} = \boxed{|3\lambda + 1|}$$

(b) Für welche Wahl von λ sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig? $\lambda = \boxed{-\dfrac{1}{3}}$

Aufgabe 3 *(1+2+1=4 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = \dfrac{3x + 23}{x^2 - x - 12}$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Nenners $x^2 - x - 12$:

$$x_1 = \boxed{4} \qquad x_2 = \boxed{-3}$$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung für $f(x)$:

$$\frac{3x + 23}{x^2 - x - 12} = \boxed{\frac{5}{x-4} - \frac{2}{x+3}}$$

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{3x + 23}{x^2 - x - 12}\,\mathrm{d}x = \boxed{\Big[5 \ln|x-4| - 2\ln|x+3|\Big]}$$

Aufgabe 4 (*1+1+2=4 Punkte*)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$.

Bestimmen Sie die Ableitungen

$$f'(x) = \boxed{3x^2\mathrm{e}^{x^3}}$$

$$f''(x) = \boxed{6x\mathrm{e}^{x^3} + 9x^4\mathrm{e}^{x^3}}$$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$:

$$T_2(f, x, 1) = \boxed{\mathrm{e} + 3\mathrm{e}(x-1) + \frac{15}{2}\mathrm{e}(x-1)^2}$$

Aufgabe 5 (*1+2=3 Punkte*)

Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3}{-4n^3+3} = \boxed{-\dfrac{1}{4}}$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^{n+1}}{n!} = \boxed{3(e^3 - 1)}$

Aufgabe 6 (*2+2=4 Punkte*)

(a) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$. Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z:

$$|z| = \boxed{4} \qquad \varphi = \boxed{\tfrac{\pi}{3}}$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$(w + 3i)^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i.$$

Geben Sie die Lösungen in der Form $w = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\boxed{w_0 = \sqrt{3} - 2i, \quad w_1 = -\sqrt{3} - 4i}$$

Aufgabe 7 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus:

1. Generieren von Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen:

$$[A\,||\,b] = \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & -3 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ Z_2 - Z_1 \\ Z_3 + 3\cdot Z_1 \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. Generieren von Einsen auf der Hauptdiagonalen

$$\iff \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot\tfrac{1}{2} \iff \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3. Generieren von Nullen oberhalb Hauptdiagonalen

$$\iff \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} Z_1 - 2\cdot Z_2 \\ \\ \\ \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc||c} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 8 *(2+1+4=7 Punkte)*
Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon f(x,y) = x^4 - x^2 + (1-2x+y)^2.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$.

(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f(x,y)$ und klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

(a) Durch Ableiten nach x und y erhält man den Gradienten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x - 4(1-2x+y) \\ 2(1-2x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + 6x - 4y - 4 \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix}$$

(b) Indem man den Gradienten weiter ableitet, erhält man die Hesse-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 12x^2 + 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Zur Berechnung der kritischen Stellen muss der Gradient nullgesetzt werden und das resultierende Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} 4x^3 + 6x - 4y - 4 \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung der zweiten Gleichung führt zu

$$y = -1 + 2x. \tag{*}$$

Einsetzen dieser Gleichung in die 1. Gleichung ergibt:

$$4x^3 + 6x - 4y - 4 = 0 \iff 4x^3 + 6x - 4(-1+2x) - 4 = 0 \iff (2x^2 - 1)x = 0.$$

Somit gilt $x_1 = 0$ oder $2x^2 - 1 = 0$, also $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.
Die jeweiligen y-Komponenten sind mit Gleichung (**??**)

$$y_1 = -1, \qquad y_2 = -1 + \sqrt{2}, \qquad y_3 = -1 - \sqrt{2}.$$

Insgesamt erhalten wir also die drei kritischen Stellen

$$P_1 = (0,-1), \qquad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \sqrt{2}\right), \qquad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \sqrt{2}\right).$$

Zur Klassifizierung der kritischen Stellen müssen diese in die Hesse Matrix eingesetzt werden, dadurch erhält man:

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(P_2) = H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Es muss noch bestimmt werden, ob diese Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind. Berechnen der Determinante liefert:

$$\det H_f(P_1) = 12 - 16 = -4 < 0.$$
$$\det H_f(P_2) = \det H_f(P_3) = 24 - 16 = 8 > 0 \text{ und } f_{xx}(P_2) = f_{xx}(P_3) = 12 > 0$$

Damit folgt mit Satz 6.2.3 aus der Vorlesung

- P_1 ist ein Sattelpunkt, da die Determinante negativ ist.
- P_2 und P_3 sind lokale Minima da die Determinante positiv und der erste Matrixeintrag positiv ist.

Aufgabe 9 (*2+2+2=6 Punkte*)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n^2}$ **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n)^{-1}$

(b) Berechnen Sie die Summe der Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$$

(a) i) Anwendung des Quotientenkriteriums liefert:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n^2}{(n+1)^2 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 2 > 1.$$

Damit folgt die Divergenz der Reihe.
Die Reihe ist also weder konvergent noch absolut konvergent.

ii) Es handelt sich um die alternierende harmonische Reihe.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{e^{\ln(n)+\ln(2)}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{e^{\ln(n)}\cdot e^{\ln(2)}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\cdot 2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

Da die Folge alternierend und streng monoton fallend ist, konvergiert die Reihe.
Da die harmonische Reihe nicht konvergiert, konvergiert die gegebene Reihe nicht absolut.

(b) Es handelt sich um die geometrische Reihe. Man macht eine Indexverschiebung und ergänzt den ersten Summanden

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Oder alternativ ohne Indexverschiebung:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{3^n} = 3\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1\right) = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 10 (*3+5+2=10 Punkte*)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int (\sin(x))^3 \,\mathrm{d}x$ **(b)** $\int_1^2 \frac{3x^2+2}{x\,(x^2+2)} \,\mathrm{d}x$ **(c)** $\int \left|e^{2x+3i}\right| \,\mathrm{d}x$

(a) Substitution von $u := \cos(x)$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$ und $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$ liefert

$$\begin{aligned}\int (\sin(x))^3 \,\mathrm{d}x &= \int \sin(x)\left(1-(\cos(x)^2\right) \,\mathrm{d}x \\ &= \int \left(u^2-1\right) \,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^3}{3} - u\right] \\ &= \left[\frac{(\cos(x))^3}{3} - \cos(x)\right].\end{aligned}$$

(b) Integration mithilfe von Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}&\frac{3x^2+2}{x\,(x^2+2)} \overset{!}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} \\ &\Leftrightarrow 3x^2+2 = Ax^2+2A+Bx^2+Cx = x^2(A+B)+xC+2A \\ &\quad\Rightarrow A+B=3, \quad C=0, \quad 2A=2 \\ &\qquad\Rightarrow A=1, \quad B=2, \quad C=0.\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\int \frac{3x^2+2}{x\,(x^2+2)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+2} \,\mathrm{d}x$$

Ausführen der Integration ergibt

$$\int \frac{3x^2+2}{x\,(x^2+2)} \,\mathrm{d}x = \left[\ln|x| + \ln(x^2+2)\right]$$

Schließlich müssen noch die Grenzen eingesetzt werden, es ergibt sich folglich

$$\int_1^2 \frac{3x^2+2}{x\,(x^2+2)} \,\mathrm{d}x = \ln(2) + \ln(6) - \ln(1) - \ln(3) = \ln(4).$$

Alternative: Verwende die Substitution:

$$y = x^3 + 2x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 2 \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{3x^3 + 2}$$

Und die Integrationsgrenzen:

$$y_1 = (1^3 + 2 \cdot 1) = 3$$
$$y_2 = (2^3 + 2 \cdot 2) = 8 + 4 = 12$$

$$\int_1^2 \frac{3x^2 + 2}{x(x^2+2)} = \int_1^2 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} = \int_3^{12} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = [\ln|y|]_3^{12}$$
$$= \ln(12) - \ln(2) = \ln(4)$$

(c) Mit Eulersche Formel erhalten wir

$$\left|e^{2x+3i}\right| = e^{2x} \cdot \left|e^{3i}\right| = e^{2x} \cdot \sqrt{(\cos(3))^2 + (\sin(3))^2} = e^{2x}.$$

Damit gilt

$$\int \left|e^{2x+3i}\right| \,\mathrm{d}x = \int e^{2x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right].$$

Aufgabe 11 (*2+2=4 Punkte*)

Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{\ln(x) - x + 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2 - 4}\right)$

(a) Da Zähler und Nenner beide gegen 0 konvergieren, kann man (zweimal) den Satz von l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{\ln(x) - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3 + x^2 - 5x + 3)'}{(\ln(x) - x + 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2 + 2x - 5)'}{(\frac{1}{x} - 1)'}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{6x + 2}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{8}{-1} = -8.$$

(b)

$$\lim_{n\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right) =' \infty - \infty' = \lim_{n\to 2} \left(\frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{4}{x^2-4}\right)$$
$$= \lim_{n\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 12 (*3 Punkte*)

Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ regulär? Ist sie invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Wir berechnen die Determinante von $\boldsymbol{A}$:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -12.$$

Da $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ ist die Matrix regulär und invertierbar.

Aufgabe 13 (*6 Punkte*)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u''(t) - 2u'(t) + 3u(t) = 0, \quad t > 0 \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -1. \end{cases}$$

Wir haben eine lineare homogene GDGL zweiter Ordnung mit Koeffizienten $a = -1$ und $b = 3$.

Da $a^2 < b$ ist, bekommen wir nach Lemma 9.3.1 $\omega = \sqrt{b - a^2} = \sqrt{2}$ und somit die Lösung

$$u(t) = e^t\left(r\sin(\sqrt{2}t) + s\cos(\sqrt{2}t)\right) \quad \text{mit} \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Um die Konstanten r und s zu bestimmen, benutzen wir die Anfangswerte:

$$u(0) = e^0\left(r\sin(0) + s\cos(0)\right) = s \overset{!}{=} 1 \quad \Longrightarrow \quad s = 1.$$

Wir berechnen $u'(t)$:

$$u'(t) = e^t\left(r\sin(\sqrt{2}t) + s\cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}r\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}s\sin(\sqrt{2}t)\right).$$

Mit dem Anfangswert $u'(0) = -1$ und $s = 1$ erhalten wir

$$u'(0) = e^0\left(r\sin(0) + \cos(0) + \sqrt{2}r\cos(0) - \sqrt{2}\sin(0)\right) = 1 + \sqrt{2}r \overset{!}{=} -1 \quad \Longrightarrow \quad r = -\sqrt{2}.$$

Damit erhalten wir

$$u(t) = e^t\left(-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{2}t)\right).$$
