Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

10. März 1992

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik III

2. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 120 min.

Zu bearbeiten sind alle sechs Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!

Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Mitte April im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 27. April 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

Gegeben sei das Vektorfeld $v := (x + y^2, y + z^2, z + x^2)^t$ sowie die Flächen

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

und

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} .$$

Die Flächen F und G beranden also zusammen die obere Hälfte der Einheitskugel.

a) Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds v.

b) Berechnen Sie den Fluß Φ_G von v durch G von unten nach oben.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauss den Fluß Φ_F von v durch F von unten nach oben.

Hinweis: "Von unten nach oben" bedeutet, daß die $z-$ Komponente des Normalenvektors der Fläche ≥ 0 sein muß.

Aufgabe 2

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem:

$$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 5\ , \quad y(0) = 0, y'(0) = -1\ .$$

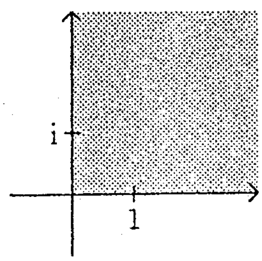
a) In welche Gleichung geht die Differentialgleichung durch eine Laplace-Transformation $y(t) \mapsto \tilde{y}(s)$ über ?

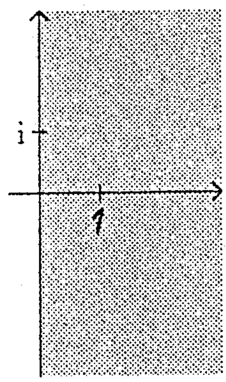
b) Lösen Sie diese Gleichung nach $\tilde{y}(s)$ auf.

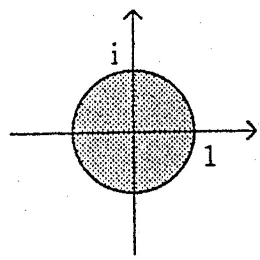
c) Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems.

Aufgabe 3

Gegeben seien die drei Gebiete in der komplexen Zahlenebene:







$\Omega_1 := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$ $\qquad$ $\Omega_2 := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ $\qquad$ $\Omega_3 := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$

Bestimmen Sie konforme Abbildungen f_1, f_2, für welche gilt:

a) $f_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$ mit $\mathrm{i} \to \mathrm{i}$.

b) $f_2 : \Omega_2 \to \Omega_3$ mit $0 \to -\mathrm{i}$ und $1 \to 0$.

Aufgabe 4

Gegeben seien ein Vektorfeld v und eine Fläche F mit

$$v := \begin{pmatrix} 2yz \\ 0 \\ 3x^2 + 4y^2 \end{pmatrix}\ , \quad F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + z^4 = 4, z \geq 0\}\ .$$

a) Bestimmen Sie ein Vektorfeld w der Form $w = (0, w_2, 0)^T$, für das gilt

$$\operatorname{rot} w = v \quad \text{und} \quad w_2(0,0,0) = 0\ .$$

b) Geben Sie eine Parametrisierung $\theta \mapsto (p(\theta), q(\theta), 0)^t$ der Randkurve C der Fläche F an und bestimmen Sie den Tangentenvektor von C.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluß Φ des Vektorfelds v durch die Fläche F von unten nach oben.

Aufgabe 5

Im Abhängigkeit vom reellen Parameter t sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ gegeben, wobei

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) In welche Form geht das Gleichungssystem $Ax = b$ durch diskrete Fourier- Transformation über ?

b) Entscheiden Sie anhand der transformierten Gleichungen, für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ das obige Gleichungsystem

b_1) keine Lösung

b_2) unendlich viele Lösungen

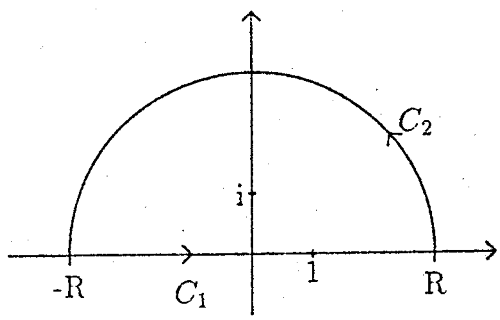
b_3) genau eine Lösung

besitzt.

c) Bestimmen Sie für $t = 1$ durch Rücktransformation die Lösung x von $Ax = b$

Aufgabe 6

Es seien C_1 und C_2 die nebenstehend skizzierten Kurven.



a) Bestimmen Sie das Residuum der Funktion

$$f(z) := \frac{z \exp(iz)}{(z^2+1)^2}$$

an der Stelle $z = i$.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)dz$.

c) Berechnen Sie das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx \, .$$

Hinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis):

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)\, dz = 0$$