Aufgabe 1 (9 Punkte)

Sei die Dreiecksfläche $T \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert durch die Eckpunkte $(-1,0),(0,0),(0,2) \in \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x + 3y^2 \\ -2e^y + 7 \end{pmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von T.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

c) (3 Punkte) Berechnen Sie den Ausfluss $A(f, \partial T)$.

d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation $Z(f, \partial T)$.

Lösung

a) $A_T = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1.$

b)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f(x,y) &= \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 = 1 - 2e^y, \\ \operatorname{rot} f(x,y) &= \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 = -6y. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A(f, \partial T) &= \iint_T \operatorname{div} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} \int_{0}^{2+2x} 1 - 2e^y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} [y - 2e^y]_0^{2+2x} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} 2 + 2x - 2e^{2+2x} - (0-2) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} 4 + 2x - 2e^{2+2x} \,\mathrm{d}x \\ &= [4x + x^2 - e^{2+2x}]_{-1}^{0} = -e^2 - (-4 + 1 - 1) \\ &= 4 - e^2. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} Z(f, \partial T) &= \iint_T \operatorname{rot} f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} \int_{0}^{2+2x} -6y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} [-3y^2]_0^{2+2x} \\ &= -3 \int_{-1}^{0} 4 + 8x + 4x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= -3[4x + 4x^2 + \tfrac{4}{3}x^3]_{-1}^{0} = 0 + 3(-4 + 4 - \tfrac{4}{3}) \\ &= -4. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2 + e^{-x}.$$

Lösung

SCHRITT 1: Homogene Gleichung

Das charakteristische Polynom $P(X)$ der DGL $y''+3y'+2y = 0$ ist $P(X) = X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$.
Die Nullstellen von P sind -1 und -2.
Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann: $f_h(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: Partikuläre Lösung

In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite.
Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y''+3y'+2y = 4x^2 + e^{-x}$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y''+3y'+2y = 4x^2$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y''+3y'+2y = e^{-x}$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$:
  Weil 0 keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = (ax^2 + bx + c)x^0e^{0x} = ax^2 + bx + c.$$

  Zweimaliges Ableiten ergibt

  $$f'_{p_1}(x) = 2ax + b,$$
  $$f''_{p_1}(x) = 2a.$$

  Setzt man dies in die DGL ein erhält man $(2a + 3b + 2c) + (6a + 2b)x + 2ax^2 = 4x^2$ und nach dem Koeffizientenvergleich damit $a = 2, b = -6$ und $c = 7$. Also

  $$f_{p_1}(x) = 2x^2 - 6x + 7.$$

- Jetzt zu $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$:
  Weil -1 eine einfache Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_2}(x) = cx^1e^{-x} = cxe^{-x}$$

Zweimaliges Ableiten ergibt

$$f'_{p_2}(x) = (c - cx)e^{-x},$$
$$f''_{p_2}(x) = (-2c + cx)e^{-x}.$$

Setzt man dies in die DGL ein, so erhält man

$$(-2c + cx)e^{-x} + 3(c - cx)e^{-x} + 2cxe^{-x} = e^{-x},$$

also $ce^{-x} = e^{-x}$ und damit $c = 1$. Also

$$f_{p_2}(x) = xe^{-x}.$$

SCHRITT 3: Alle reellen Lösungen

In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + xe^{-x} + 2x^2 - 6x + 7 \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

um die gesuchte allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zu bekommen.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay. \tag{1}$$

a) (10 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von (1) mit $y_1(0) = v_1$, $y_2(0) = v_2$ und $y_3(0) = v_3$.

b) (1 Punkt) Begründen Sie, dass die Lösungen y_1, y_2 und y_3 ein Fundamentalsystem von (1) bilden.

Lösung

a) Wir berechnen

$$Av_1 = 0.$$

Somit ist v_1 einen Eigenvektor von A zum Eigenwert 0. Die Lösung y_1 von (1) mit $y_1(0) = v_1$ ist also gegeben durch $y_1(x) = v_1$.

Wir berechnen

$$A^2 v_2 = Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt

$$A^2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_3 - 2v_2 = 2Av_2 - 2v_2.$$

Sei $f(X) = X^2 - 2X + 2$. Dann gilt also $f(A)v_2 = 0$. Mithilfe der Mitternachtsformel findet man die Nullstellen $1 \pm \mathrm{i}$ von f. Die Funktionen

$$g_1(x) = \mathrm{e}^x \cos(x), \qquad g_2(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$$

bilden also ein Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung $f(D)y = 0$. Für die Wronskimatrix dieser zwei Funktionen berechnet man

$$M(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos(x) & \mathrm{e}^x \sin(x) \\ \mathrm{e}^x(\cos(x) - \sin(x)) & \mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x)) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Transponierte der unteren Dreiecksmatrix $M(0)$ und seine Inverse sind

$$M(0)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left(M(0)^\top\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schlussfolgern, dass

$$y_2(x) = (v_2 \mid Av_2)\left(M(0)^\top\right)^{-1}\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x\cos(x) \\ \mathrm{e}^x\sin(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x\cos(x) \\ -\mathrm{e}^x\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Differentialgleichungsystems (1) mit $y_2(0) = v_2$ ist.

Die Ableitung

$$y_3(x) = y_2'(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x\left(\cos(x) - \sin(x)\right) \\ -\mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) mit $y_3(0) = Av_2 = v_3$.

b) Da $\det(v_1 \mid v_2 \mid v_3) = -1$, sind die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig. Somit bilden die Lösungen y_1, y_2 und y_3 mit Anfangswerte $y_i(0) = v_i, i = 1, 2, 3$ ein Fundamentalsystem von (1).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\pi, 0), \\ x & \text{für } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

gegeben.

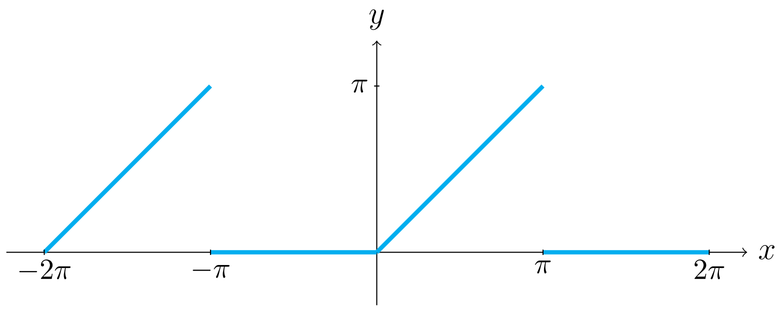
a) (2 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle $x \in [0, 2\pi]$ den Grenzwert der Fourier-Reihe.

Lösung

a) Skizze:



b) (1) Für a_0 errechnet man:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2}\pi^2\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) Die Koeffizienten a_n für $n > 0$ folgen durch Integration:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \\ &= \left[x \cdot \frac{1}{n\pi}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi}\sin(nx)dx \\ &= 0 + \left[\frac{1}{n^2\pi}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}((-1)^n - 1) \\ &= \left(\begin{cases} -\frac{2}{n^2\pi} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}\right). \end{aligned}$$

(3) Die Koeffizienten b_n für $n > 0$ folgen durch Integration:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \\ &= \left[-x \cdot \frac{1}{n\pi}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n\pi}\cos(nx)dx \\ &= -\frac{\pi}{n\pi}(-1)^n - \left[\frac{1}{n^2\pi}\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

(4) Die Fourier-Reihe von f ist

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \\ &\sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \end{aligned}$$

c) Die Funktion f ist stetig und stückweise stetig differenzierbar mit endlichen rechts- und linksseitigen Grenzwerten für f und f' in allen Punkten von $[0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$, deshalb konvergiert die Fourier-Reihe in diesen Punkten gegen $f(x)$.

Im Punkt π macht f einen Sprung der Höhe π und die Fourier-Reihe konvergiert gegen das arithmetische Mittel von links- und rechtsseitigem Grenzwert. Es gilt also

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi+0} f(x) + \lim_{x\to\pi-0} f(x)\right) = \frac{\pi}{2}.$$