Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/11	/7	/9	/10	/12	/74

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Seien $(f_k : [0,5] \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit stetiger Grenzfunktion $f : [0,5] \to [-99,99]$, also $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für jedes $x \in [0,5]$. Gilt dann $\lim_{k\to\infty} \int_0^5 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Ein Gegenbeispiel sind die Dreiecksfunktionen $f_k : [0,5] \to \mathbb{R}$ als affin-lineare Interpolation von $0 \mapsto 0$, $1/k \mapsto k$, $2/k \mapsto 0$, $5 \mapsto 0$ für $k \geq 1$. (Skizze!)

Erläuterung: Für den Index $k = 0$ können wir die Funktion f_0 beliebig wählen, etwa $f_0 = 0$. Jede der Funktionen f_k ist stetig. In jedem Punkt $x \in [0,5]$ gilt $f_k(x) \to 0$ für $k \to \infty$. Die Grenzfunktion ist demnach gegeben durch $f(x) = 0$. Insbesondere ist auch f stetig. (Stetigkeit kann beim Grenzübergang kaputt gehen, aber hier wollten wir sogar das bewerkstelligen.) Trotz allem gilt $\int_0^5 f_k(x)\mathrm{d}x = 1$ und $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Wir haben also ein Gegenbeispiel.

2

2B. Gibt es eine stetige und 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Fourier–Koeffizienten die Ungleichung $|c_k| \geq 1/\sqrt{k}$ für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ erfüllen?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Stetig impliziert quadrat-integrierbar auf $[-\pi,\pi]$, und dank Energiegleichung folgt somit $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^2| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$. Das ist hier unmöglich wegen $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^2| \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$.

Erläuterung: Die Energiegleichung gilt immer, besonders interessant ist der endliche Fall: Genau dann ist die Funktion f quadrat-integrierbar, wenn ihr Spektrum $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ quadrat-summierbar ist, und die obige Energiegleichung gilt dann in $\mathbb{R}$. Das wirkt!

2

2C. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ besitze Hauptvektorketten der Länge 2 zum Eigenwert 1 und der Länge 3 zum Eigenwert 4. Wie lautet demnach das charakteristische Polynom von A?

Begründete Antwort:

Das charakteristische Polynom von A ist $P_A(x) = (x-1)^2(x-4)^3$.

Bezüglich der genannten Jordan–Basis wird A dargestellt durch die Matrix $J = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&4&1&0\\ 0&0&0&4&1\\ 0&0&0&0&4 \end{pmatrix}$.

Erläuterung: Die Matrizen A und J sind konjugiert, genauer gilt $A = T^{-1}JT$, wobei die Basiswechselmatrix $T = (u_1, u_2, v_1, v_2, v_3)$ aus den Hauptvektorketten besteht. Das charakteristische Polynom der Matrix J können wir sofort ablesen, bei Konjugation zu A ändert es sich nicht! Das kennen Sie aus der HM1 für Diagonalisierung, hier nun für Jordanisierung.

2

2D. Für $(u,v):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ lösen wir das Differentialgleichungssystem $u''=u'+v$ und $v''=v'-u$ und finden drei Lösungen. Lässt sich daraus jede weitere Lösung linear kombinieren?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 4.

Erläuterung: Wir schreiben unser DGSystem äquivalent als DGSystem erster Ordnung:

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ v \\ v' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Darauf können wir nun wunderbar den Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme anwenden: Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 4. Drei Elemente (hier: Lösungsfunktionen) genügen daher nicht, diesen Raum aufzuspannen. Bei jeder konkreten Rechnung wissen wir so, wie viele Lösungen wir suchen, und wann wir alle gefunden haben!

2

2E. Sie werfen einen fairen Würfel mit den Augenzahlen $1,2,3,4,5,6$. Sei A das Ereignis „Der Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl“ und B das Ereignis „Der Würfel zeigt die Augenzahl 7“ (kein Tippfehler). Ist das Paar (A,B) stochastisch unabhängig?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Die definierende Produktformel ist hier erfüllt:
Es gilt $\mathbf{P}(B)=0$, also $\mathbf{P}(A\cap B)=0=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Erläuterung: Die Wkt $\mathbf{P}(A)=1/2$ wird hier gar nicht benötigt. Für je zwei Ereignisse A,B in einem WRaum $(\Omega,\mathbf{P})$ gilt allgemein: Aus $\mathbf{P}(B)=0$ folgt, dass (A,B) unabhängig ist.

Dasselbe gilt übrigens auch für den anderen Extremfall $\mathbf{P}(B)=1$. Wenn Sie möchten, können Sie dies als Übung versuchen, oder sich weitere Varianten zur Unabhängigkeit überlegen.

2

2F. Sie suchen $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $y\,\partial_x u(x,y)-x\,\partial_y u(x,y)=0$ und $u(x,0)=\sin(x)$. Aus $X'=Y$, $Y'=-X$ erhalten Sie Kreise um $(0,0)$ als Charakteristiken. Existiert demnach eine Lösung u?

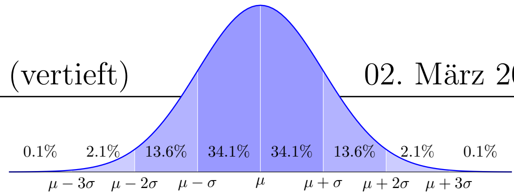
☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Auf jedem Kreis vom Radius $r\in\,]0,\pi[$ werden zwei widersprüchliche Startwerte vorgegeben.

Erläuterung: Ausführlich lösen wir $X'=Y$, $Y'=-X$ und $U'=0$. Entlang jeder Charakteristik $X(s)=x_0\cos(s)$, $Y(s)=-x_0\sin(s)$ ist demnach der Funktionswert $U(s)$ konstant. Die ist mit den gegebenen Anfangswerten $u(x,0)=\sin(x)$ unvereinbar, denn jede Charakteristik müsste dann $U(0)=u(x_0,0)=\sin(x_0)$ und $U(\pi)=u(-x_0,0)=-\sin(x_0)$ erfüllen.

Ohne Vorbereitung ist diese Frage etwas trickreich, da man die geometrische Anordnung verstehen muss. Zum Glück kennen Sie dieses schöne Beispiel aus Ihrer Vorlesung!

2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

3A. In einer Population von 10 Millionen Fischen sind 60% Weibchen. Es werden zufällig 15 000 Fische gefangen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p sind darunter höchstens 9070 Weibchen? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 15000 \cdot 0.6 = 9000$ Erwartungswert zu $B(n,t)$, $n = 15000$, $t = 0.6$

$\sigma^2 = 9000 \cdot 0.4 = 3600, \quad \sigma = 60$ Varianz und Streuung zu $B(n,t)$

$p \approx \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t), \quad \beta = 70.5/60 = 1.175$ Lokaler Grenzwertsatz, Stetigkeitskorrektur

$\approx 0.50 + 0.38 = 0.88 = 88\%$ Ablesen aus der Tabelle, glückliche Interpolation

Erläuterung: Bei Stichprobe ohne Zurücklegen ist die exakte Verteilung hypergeometrisch. Da die Gesamtpopulation von $N = 10^7$ sehr groß ist, nähern wir $H(N,K,n)$ durch die Binomialverteilung $B(n,t)$ mit $n = 15000$ und $t = 0.6 = K/N$. Als bequeme Näherung für $B(n,t)$ nutzen wir schließlich die Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$ dank lokalem Grenzwertsatz. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten Sie $\beta = 70/\sigma \approx 1.166$; das ist etwas ungenauer, der Unterschied verschwindet glücklicherweise in der Rundung. Alles wird gut.

3

3B. Sie wiederholen 1000 mal ein Experiment mit Trefferquote 99.8% (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie mindestens 998 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 1000 \cdot 0.002 = 2$ Erwartungswert für die Anzahl der Nicht-Treffer

$q \approx \left[\frac{\mu^0}{0!} + \frac{\mu^1}{1!} + \frac{\mu^2}{2!}\right] e^{-\mu}$ Näherung durch die Poisson–Verteilung $P(\mu)$

$\approx 5 \cdot 0.135 = 0.675 \approx 68\%$ Einsetzen und ausrechnen

Erläuterung: Das exakte Verteilung ist binomial, nämlich $B(n,t)$ mit $n = 1000$ und $t = 0.2$. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe nutzen wir als Näherung hier Poissons Gesetz der kleinen Zahlen. Der exakte Wert ist $q = 0.67667\ldots$, die Poisson–Näherung ist wie erwartet sehr gut. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Es gibt hier keinerlei Grund, den lokalen Grenzwertsatz zu nutzen. Wenn Sie es dennoch tun, finden Sie $\int_{-2.5/\sigma}^{0.5/\sigma} \varphi(t)\,dt \approx 0.59989 \approx 60\%$ oder $\int_{-\infty}^{0.5/\sigma} \varphi(t)\,dt \approx 0.63829 \approx 64\%$. Diese Näherungen sind allzu grob und hier nicht gut genug; das war zu erwarten.

3

3C. Beim weltgrößten Tischkickerturnier in Hamburg treten 2500 Spieler an, davon 2% Profis und 98% Amateure. In die Endrunde gelangen Profis mit Wkt 98%, Amateure mit Wkt 6%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit r ist ein zufällig ausgewählter Endrundenteilnehmer ein Profi?

$r = \mathbf{P}(P|E) = \dfrac{\mathbf{P}(P \cap E)}{\mathbf{P}(E)}$ Definition der bedingten Wkt, $P =$ Profi, $E =$ Endrunde

$= \dfrac{\mathbf{P}(E|P)\mathbf{P}(P)}{\mathbf{P}(E|P)\mathbf{P}(P) + \mathbf{P}(E|A)\mathbf{P}(A)}$ Bayes, entweder $P =$ Profi oder $A =$ Amateur

$= \dfrac{0.98 \cdot 0.02}{0.98 \cdot 0.02 + 0.06 \cdot 0.98}$ Daten einsetzen

$= \dfrac{1}{4} = 0.25 = 25\%$ Ausrechnen

Erläuterung: Bei dieser Aufgabe hilft, wie so oft, eine gute Notation, um über die gesuchten und die gegebenen Daten effizient buchzuführen. Das ist eigentlich die einzige Schwierigkeit, der Rest ist Bruchrechnung. Sie können Ihren Ansatz auch in Baumform organisieren, wenn Ihnen das leichter / vertrauter scheint; das ist etwas länger, führt aber zum selben Ergebnis.

Fun fact: Dieselbe Rechnung kennen Sie aus der Vorlesung, dort für die Zuverlässigkeit eines Tests. Damals klang das Ergebnis paradox, jetzt plausibel. Mathematik schafft Klarheit!

3

3D. Bei einem *Massive Multiplayer Online Game (MMO)* stehen 10^6 Charaktere zur Auswahl (inklusive aller Varianten). Jeder der 1100 Spieler wählt einen Charakter (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit s sind alle gewählten Charaktere verschieden?

$s = \Big(1 - \dfrac{0}{10^6}\Big)\Big(1 - \dfrac{1}{10^6}\Big) \cdots \Big(1 - \dfrac{1099}{10^6}\Big)$ exakte Wkt, setze $n = 10^6$, $k = 1100$

$= \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}\Big(1 - \frac{j}{n}\Big) \lessapprox \prod_{j=0}^{k-1}\exp\Big(-\frac{j}{n}\Big)$ gute Näherung durch Exponentialfunktion

$= \exp\Big(-\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}\Big) = \exp\Big(-\frac{k(k-1)}{2n}\Big)$ Exponentialgesetz, Summenformel

$\approx \mathrm{e}^{-0.604} \approx 0.546 \approx 55\%$ Einsetzen und Ausrechnen

Erläuterung: Sie kennen diese Rechnung aus der Vorlesung zum Geburtstagsparadox, oder allgemein zu Kollisionswkten. Der exakte Wert des obigen Produkts ist $s = 0.54625\ldots$, unsere Näherung durch die Exponentialfunktion ist also erfreulich gut. Die Rechnung lässt genügend Spielraum für kleine Rundungen und führt dennoch auf das richtige Endergebnis.

Fun fact: Ergebnisse dieser Art gelten als paradox, da die Kollisionswkt unerwartet hoch ist. Bei nur 3000 Spielern beträgt sie bereits etwa 99%. Das liegt an dem Quadrat k^2 im Zähler!

3

Aufgabe 4. *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (11 Punkte)

4A. Zu lösen ist für $t \ge 0$ die Differentialgleichung $y'''(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t) = 0.$ (L)

Geben Sie das charakteristische Polynom p der Gleichung (L) an:

$p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

1

Zerlegen Sie das Polynom p in Linearfaktoren:

$p(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$

2

Nennen Sie eine Basis des Raumes aller reellen Lösungen $y : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ von (L).

Basis: $\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{t}, \mathrm{e}^{3t}$

1

Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ von (L) mit $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$.

$u(t) = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{3t}$

2

4B. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $\Phi:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto \cos(x) - 2xy + y^2$.

$$\operatorname{grad}\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(x)-2y\\-2x+2y\end{pmatrix}$$

1

Bestimmen Sie die Funktion $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $(2y-2x)y' = \sin(x)+2y$ und $y(0)=-1$.

$\Phi(y(x),x) = \Phi(y(0),0) = 2$ Die Lösung ist eine Niveaulinie von Φ.

$y^2 - 2xy + \cos(x) - 2 = 0$ Wir erhalten eine implizite Gleichung für y und x.

$y(x) = x - \sqrt{x^2 + 2 - \cos(x)}$ Explizit auflösen nach $y(x)$, korrektes Vorzeichen!

Erläuterung: Sie erkennen hier sofort: Die Differentialgleichung ist exakt mit Potential Φ. In etwas realistischeren Aufgaben müssen Sie das ersehnte Potential erst selbst bestimmen. Um diese Aufgabe kurz zu halten, ist hier das Potential bereits gegeben, Sie müssen es nur richtig nutzen. *Übung:* Lösen Sie die Differentialgleichung ohne den vorhergehenden Hinweis. Die komplette Rechnung bräuchte mehr Zeit und brächte entsprechend mehr Punkte.

Probe: Erfüllt die Funktion y die Differentialgleichung und den Anfangswert?

Bemerkung: In der Klausur hatte sich bedauerlicherweise ein Tippfehler eingeschlichen, dort stand $(2y-2x)y' = \sin(x) + y$. Sie sehen hier die korrekte, ursprüngliche Aufgabenstellung.

4

Aufgabe 5. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{>-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} \partial_x u(x,y) - \dfrac{y}{1+x} \partial_y u(x,y) = -x\, u(x,y) & \text{für alle } x > -1 \text{ und } y \in \mathbb{R}, \\ u(0,y) = y & \text{für } x = 0 \text{ und alle } y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (0, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

5A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = 1$, $X(0) = 0$,

$Y'(s) = \boxed{-\dfrac{Y(s)}{1+X(s)}}$, $Y(0) = y_0$,

$U'(s) = \boxed{-X(s)\, U(s)}$, $U(0) = y_0$.

2

5B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$X(s) = s$,

$Y(s) = \boxed{\dfrac{y_0}{1+s}}$,

$U(s) = \boxed{y_0\, \mathrm{e}^{-s^2/2}}$.

2

5C. Bestimmen Sie zu $(x,y) \in \mathbb{R}_{>-1} \times \mathbb{R}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x,y)$ gilt:

$s = \boxed{x}$, $y_0 = \boxed{(1+x)y}$.

2

5D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(1,2)$ gilt $u(1,2) = 4/\sqrt{\mathrm{e}}$.

$u(x,y) = U(s) = (1+x)y\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ Machen Sie die Probe!

Erfolgreiche Probe zeigt die Existenz einer Lösung. Unsere Herleitung zeigt die Eindeutigkeit.

1

Aufgabe 6. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (9 Punkte)

Zu lösen ist für $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ das homogene, lineare Differentialgleichungssystem

$$
\text{(H)}\quad \left\{\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_1(t) - y_3(t) - y_4(t)\\
y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) - y_3(t) - y_4(t)\\
y_3'(t) &= y_1(t) - y_2(t) - 2y_3(t) - y_4(t)\\
y_4'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t) + 2y_3(t) + y_4(t)
\end{aligned}\right.
$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A, die das obige System in der Form $y' = A\,y$ darstellt.

$$
A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}}
\qquad
A + 1E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}
$$

$\overline{}$ 1

6B. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$
A \sim T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \quad\text{mit}\quad T = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathrm{GL}_4\,\mathbb{R} \quad\text{und}\quad \lambda = \boxed{-1}.
$$

$\overline{}$ 1

6C. Bestimmen Sie eine Basis v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^4$, die diese Jordan–Normalform realisiert:

$$
v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}},\quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v_4 = \boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}.
$$

$\overline{}$ 2

6D. Bestimmen Sie zu (H) die zugehörige Fundamentalmatrix $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4} : t \mapsto W(t)$. Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto w_k(t)$ von (H) mit Startvektor $w_k(0) = v_k$.

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1+t & 2+t+t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{e}^{-t} \\ 1 & t & t^2/2 & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

3

6E. Wir wählen den Startwert $y(0) \in \mathbb{R}^4$ zufällig, stetig verteilt um den Nullpunkt. Wie verhält sich typischerweise die Lösung $t \mapsto y(t)$ für $t \to \infty$?

- [ ] $|y(t)|$ konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$.
- [ ] $|y(t)|$ konvergiert nicht, bleibt aber beschränkt.
- [X] $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst polynomiell.
- [ ] $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst exponentiell.

Begründung: Jede Lösung y ist eine Linearkombination $y = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Mit Wkt 1 gilt $\alpha_3 \neq 0$. Die Lösung $y(t)$ wächst dann quadratisch.

Erläuterung: Theoretisch möglich sind lineares Wachstum ($\alpha_2 \neq 0 = \alpha_3$) und Beschränktheit ($\alpha_1 \neq 0 = \alpha_2 = \alpha_3$) sowie Konvergenz gegen 0 (für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Diese Fälle haben jedoch Wkt 0. Gefragt war das typische Verhalten: quadratisches Wachstum.

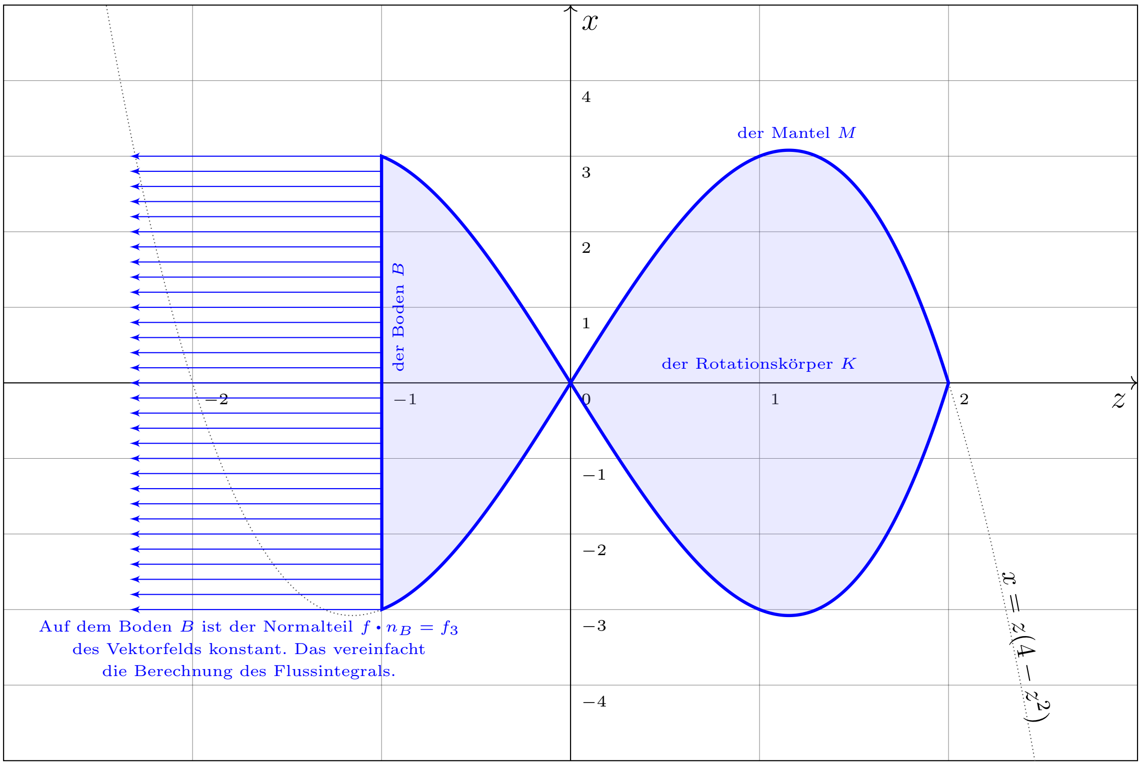
2

Aufgabe 7. *Integration und Integralsätze* (10 Punkte)

Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den folgenden Körper K und das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \le z \le 2 \\ x^2+y^2 \le z^2(4-z^2)^2 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35x \\ \frac{8}{3}yz \\ -\frac{4}{3}z^2 \end{pmatrix}$$

7A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der z–x–Ebene $E = \{ (x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \}$:



2

7B. Parametrisieren Sie K mittels Zylinderkoordinaten $\Phi : D \xrightarrow{\sim} K$ vermöge

$$\Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \le z \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \boxed{|z|\cdot(4-z^2)} \end{matrix} \right\}.$$

1

7C. Die Bodenfläche von K bezeichnen wir mit $B = \{ (x,y,z)^\intercal \in K \mid z = -1 \}$.
Bestimmen Sie das Flussintegral von f durch den Boden B aus dem Körper K heraus:

$$\int_B f \bullet \mathrm{d}B = \int_B f \bullet n_B\,|\mathrm{d}B| = \int_B \frac{4}{3}\,|\mathrm{d}B| \quad \text{Fächenintegral über Normalteil, hier konstant}$$

$$= \frac{4}{3}\int_B |\mathrm{d}B| = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 3^2 = 12\pi \quad \text{Linearität des Integrals, Flächeninhalt von } B$$

Erläuterung: Allgemein für ein Flächenstück M wählen Sie, wie geübt, eine Parametrisierung $\Psi:\mathbb{R}^2 \supset E \xrightarrow{\sim} M : (s,t) \mapsto \Psi(s,t)$, berechnen das zugehörige Flächenelement $\mathrm{d}M = \mathrm{d}\Psi(s,t)$, und integrieren das Skalarprodukt vermöge $\int_M f \bullet \mathrm{d}M = \int_E f(\Psi(s,t)) \bullet \mathrm{d}\Psi(s,t)$ über $E \subset \mathbb{R}^2$. Dasselbe ist natürlich auch hier möglich, aber unnötig umständlich: Der Integrand $f \cdot n_B$ ist hier konstant, und das Flächenstück B ist eine Kreisscheibe vom Radius 3, siehe Skizze!

2

7D. Berechnen Sie das Volumen von K. *Hinweis:* Es gilt $35 \cdot \left[\frac{16}{3}u^3 - \frac{8}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right]_{u=-1}^{2} = 477$.

$\operatorname{vol}(K) == \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z)$	Definition des Volumens
$= \int_D \lvert \det \Phi'(r,\varphi,z) \rvert \,\mathrm{d}(r,\varphi,z)$	Transformationssatz und...
$= \int_{z=-1}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\lvert z \rvert (4-z^2)} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi$	Fubini wie zuvor vorbereitet
$= \pi \int_{z=-1}^{2} z^2(4-z^2)^2 \,\mathrm{d}z$	Integral über φ und r (oder direkt Fubini)
$= \pi \int_{z=-1}^{2} 16z^2 - 8z^4 + z^6 \,\mathrm{d}z$	Ausmultiplizieren zu Summe von Monomen
$= \pi \left[\frac{16}{3}z^3 - \frac{8}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7\right]_{z=-1}^{2}$	HDI, Stammfunktion
$= \frac{477}{35}\pi$	Ausrechnen, Hinweis

3

7E. Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes f.

$$\operatorname{div} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 35 + \frac{8}{3}z - \frac{8}{3}z = 35$$

1

7F. Bezeichne M die verbleibende Randfläche von K ohne den Boden B.
Bestimmen Sie das Flussintegral von f durch M aus dem Körper K heraus.

$\int_M f \bullet \mathrm{d}M = \int_K \operatorname{div}(f) \,\mathrm{d}K - \int_B f \bullet \mathrm{d}B = 35 \operatorname{vol}(K) - 12\pi = 465\pi$

Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Integralsatzes von Gauß. Die zweite Gleichung nutzt $\operatorname{div}(f) = 35$ und die Linearität des Integrals sowie die Definition des Volumens $\operatorname{vol}(K) = \int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z)$. Aus unseren vorigen Ergebnissen erhalten wir die rechte Seite. Voilà.

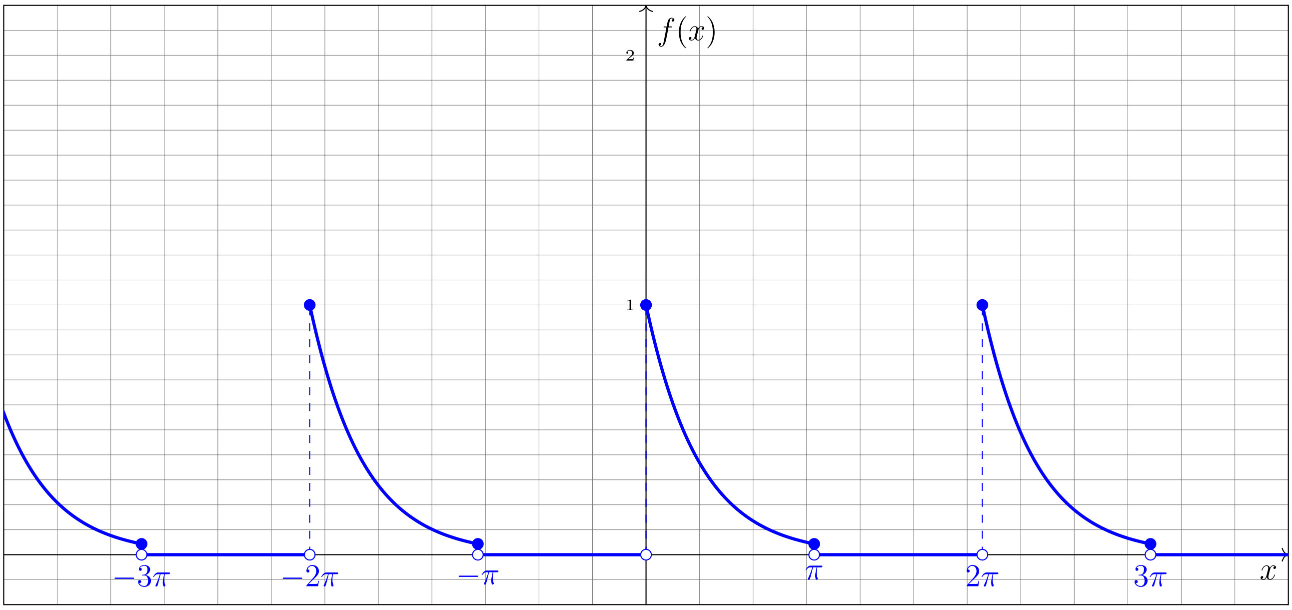
Sie tun sich einen Gefallen, wenn Sie einfache Lösungen erkennen und nutzen. Dieses unnötig große Kästchen bietet auch Platz für umständliche Rechnungen, falls dies gewünscht wird.

1

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (12 Punkte)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hier 2π–periodisch mit $f(x)=0$ für $-\pi<x<0$ und $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ für $0\le x\le\pi$.

8A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12,12]$:

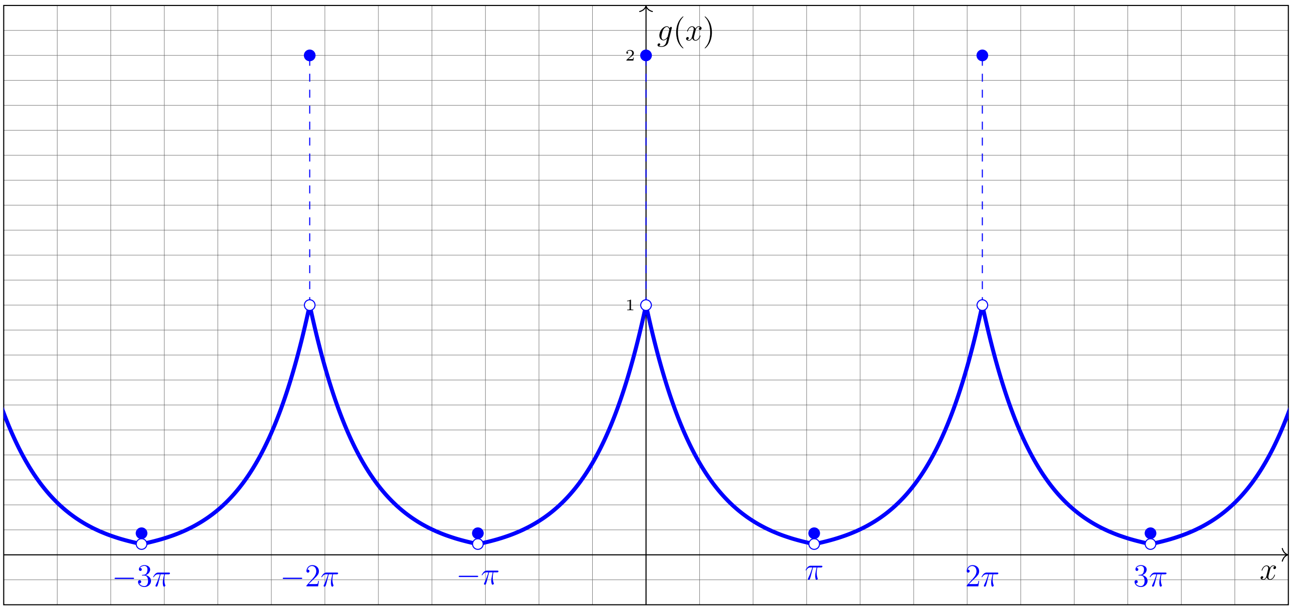


Bestimmen Sie zu f den Grenzwert der Fourier–Polynome $f_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x=\pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \frac{f(\pi-)+f(\pi+)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-\pi}+0}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi}$$ Dank Dirichlet-Kriterium!

2

8B. Skizzieren Sie ebenso die (unstetige!) Funktion g mit $g(x)=f(-x)+f(x)$.



Bestimmen Sie zu g den Grenzwert der Fourier–Polynome $g_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} d_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x=0$:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(0) = \frac{g(0-)+g(0+)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$ Dank Dirichlet-Kriterium!

3

8C. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{ikx}$:

$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{x=-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x$ Definition der komplexen Fourier–Koeffizienten

$= \frac{1}{2\pi}\int_{x=0}^{\pi} \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}k)x}\,\mathrm{d}x$ Einsetzen und vereinfachen: Exponentialgesetz

$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-1-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i}k)x}\right]_{x=0}^{\pi}$ Stammfunktion ausschreiben

$= \frac{1}{2\pi}\frac{1-\mathrm{i}k}{1+k^2}\left[1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k\right]$ Einsetzen und vereinfachen

Erläuterung: Die Berechnung dieser Integrale erfordert die übliche Sorgfalt und Routine. Je nach vorgegebener Funktion f ist die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mehr oder weniger hübsch.

Das Ergebnis wurde soweit möglich vereinfacht, sodass der Nenner reell ist. Insbesondere können Sie aus c_k leicht die reellen Koeffizienten $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$ ablesen.

3

8D. Aus der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{ikx}$ folgt sofort $f(-x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{-k}\,\mathrm{e}^{ikx}$.

Bestimmen Sie die Fourier–Koeffizienten von $g(x) := f(-x) + f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\,\mathrm{e}^{ikx}$:

$d_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+k^2}\left[1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k\right]$

1

8E. Bestimmen Sie den exakten Wert der Summe $S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1+k^2}\left[1-\mathrm{e}^{-\pi}(-1)^k\right] \in [2.1, 2.2]$:

$\sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\,\mathrm{e}^{ik0} = 1$ Auswerten von $g(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\,\mathrm{e}^{ikx}$ an der Stelle $x = 0$

$\frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi} + \frac{1}{\pi}S = 1$ Einsetzen der Koeffizienten d_k und der Summe S

$S = \pi - 1 + \mathrm{e}^{-\pi} = 2.18481\ldots$ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet, denn im Punkt $x = 0$ existieren die einseitigen Grenzwerte $g(0\pm) = 1$ und auch die Ableitungen $g'(x\pm) = \mp 1$. Die Fourier–Reihe $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher im Punkt $x = 0$ für $n \to \infty$ gegen den Mittelwert $(g(x-) + g(x+))/2 = 1$. Die so erhaltene Gleichung lösen wir sorgfältig auf.

Der Hinweis $S \in [2.1, 2.2]$ dient zur Probe dank $\pi \approx 3.14$ und $0 < \mathrm{e}^{-\pi} < 0.05$.

3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.