Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Betriebswirtschaftslehre (Prüfungsnummer 4199100000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–9** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **25.04.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi(x^3 - 2)}{4x^3 + 2}\right)$

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := -5x^2 + 2x + 4xy - y^2 - 5$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Berechnen Sie die Flachstelle P von f.

(c) Ist P eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von f?

Aufgabe 3 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \quad := \quad \tfrac{1}{4}(y^4 - x^4) - x^2 y - yz \\ g = g_1 \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) \quad := \quad \pi(z^2 - 1) - 2\sin(\pi xy) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y, z)$ und $\nabla_g(x, y, z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x, y, z)$ und $\mathrm{H}_g(x, y, z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P := (1, -1, -1) \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_2^3 \frac{4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} \, \mathrm{d}x \ .$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \cos(x^2) \, \mathrm{d}x \ .$$

Aufgabe 5 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Sei ein Sparvertrag geplant mit Startkapital $K_0 = 500€$. Es soll nachschüssig jährlich eine Rate von $R = 30€$ eingezahlt werden. Der Zinssatz betrage $p = 1\%$.

   (1) Berechnen Sie das Guthaben nach einem Jahr.

   (2) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 4000€ erreicht ist?

(b) Es soll ein Betrag K_0 auf einem Konto mit einem Zinssatz von 25% angelegt werden, also zu einem Zinsfaktor von $q = \frac{5}{4}$.

   Jeweils zum Jahresende soll eine Auszahlung von 100€ getätigt werden.

   Wie hoch muss K_0 sein, damit nach 2 Jahren das Kapital aufgebraucht ist, also $K_2 = 0$ ist?

Aufgabe 6 (2+1 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x^3$. Sei $x_0 := 1$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 2.

$T_2(x) \;=$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie das Restglied $R_2(x)$ an, für welches $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ gilt für $x \in \mathbb{R}$. Hierbei soll das Restglied als Integral stehenbleiben.

$R_2(x) \;=$ $\boxed{}$

Aufgabe 7 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

$\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} \;=$ $\boxed{}$

Bitte wenden →

Aufgabe 8 (1+1+1+1 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Parameter. Seien $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_s = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Berechnen Sie den Cosinus des von b_s und c eingeschlossenen Winkels φ.

$$\cos(\varphi) = \boxed{}$$

(b) Berechnen Sie:

$$b_s \times c = \boxed{}$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von b_s und c aufgespannten Parallelogramms in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\boxed{}$$

(d) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass das Volumen des von a, b_s und c aufgespannten Parallelepipeds gleich 1 ist.

$$s = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix:

$$A^{-1} = \boxed{}$$
