Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Betriebswirtschaftslehre (Prüfungsnummer 4199100000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–9** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **25.04.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi(x^3-2)}{4x^3+2}\right)$

Lösung.

(a) Mit der Regel von l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x-1}{2x} = \frac{4}{2} = 2\ .$$

Alternative Lösung: Es ist $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2.$

(b) Da die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ stetig ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \cos\left(\frac{\pi(x^3-2)}{4x^3+2}\right) &= \cos\left(\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi(x^3-2)}{4x^3+2}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{x\to +\infty} \pi \cdot \frac{1-\frac{2}{x^3}}{4+\frac{2}{x^3}}\right) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y) := -5x^2 + 2x + 4xy - y^2 - 5$.

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y)$ und $\mathrm{H}_f(x,y)$.

(b) Berechnen Sie die Flachstelle P von f.

(c) Ist P eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle von f?

Lösung.

(a) Es ist

$$\nabla_f(x,y) = \begin{pmatrix} -10x+2+4y \\ 4x-2y \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \ .$$

(b) Eine Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Flachstelle von f, falls $\nabla_f(x,y) = 0$ gilt.

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -10x + 2 + 4y &= 0 \\ 4x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

lösen:

Aus der 2. Gleichung folgt, dass $y = 2x$ ist.

Damit folgt aus der 1. Gleichung, dass $-10x + 2 + 8x = 0$ ist, d.h. $x = 1$.

Somit ist $P := (1,2)$ die einzige Flachstelle von f.

(c) Um zu überprüfen, ob bei P eine lokale Minimalstelle, Maximalstelle oder Sattelstelle vorliegt, müssen wir die positive oder negative Definitheit von $\mathrm{H}_f(P)$ überprüfen.

Es ist $\mathrm{H}_f(1,2) = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(P)) = -10 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(P)) = \det(\mathrm{H}_f(P)) = 4 > 0$. Somit ist sie negativ definit. Also ist $(1,2)$ eine lokale Maximalstelle von f.

Aufgabe 3 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) &:=& \tfrac{1}{4}(y^4 - x^4) - x^2 y - yz \\ g = g_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) &:=& \pi(z^2-1) - 2\sin(\pi xy) \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P := (1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x^3-2xy \\ y^3-x^2-z \\ -y \end{pmatrix}$ und $\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2\pi y\cos(\pi xy) \\ -2\pi x\cos(\pi xy) \\ 2\pi z \end{pmatrix}$.

Es ist

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -3x^2-2y & -2x & 0 \\ -2x & 3y^2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\pi^2 y^2 \sin(\pi xy) & -2\pi\cos(\pi xy)+2\pi^2 xy\sin(\pi xy) & 0 \\ -2\pi\cos(\pi xy)+2\pi^2 xy\sin(\pi xy) & 2\pi^2 x^2 \sin(\pi xy) & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix}.$$

(b) Wir stellen das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können. Für ein $\rho \in \mathbb{R}$ soll $\nabla_f(x,y,z) = \rho \cdot \nabla_g(x,y,z)$ und $g(x,y,z) = 0$ gelten.

Dies liefert das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} -x^3 - 2xy &= \rho \cdot (-2\pi y\cos(\pi xy)) \\ y^3 - x^2 - z &= \rho \cdot (-2\pi x\cos(\pi xy)) \\ -y &= \rho \cdot (2\pi z) \\ \pi(z^2-1) - 2\sin(\pi xy) &= 0 \end{aligned}$$

(c) Einsetzen des Punktes $P = (1,-1,-1) \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$\begin{aligned} 1 &= \rho \cdot (-2\pi) \\ -1 &= \rho \cdot 2\pi \\ 1 &= \rho \cdot (-2\pi) \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dies wird durch $\rho = -\frac{1}{2\pi}$ gelöst.

Da $N(P) = \nabla_g(P) = \begin{pmatrix} -2\pi \\ 2\pi \\ -2\pi \end{pmatrix}$ nur aus einer Spalte ungleich null besteht, ist das Spaltentupel von $N(P)$ linear unabhängig.

Somit ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \rho = -\frac{1}{2\pi}$.

(d) Wir untersuchen, ob P eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Es ist $H = \mathrm{H}_f(P) - \rho \cdot \mathrm{H}_g(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen eine Matrix U, deren Spaltentupel eine Basis von $\{u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : N(P)^{\mathrm{t}} u = 0\}$ ist.

Eine Basis des Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $N(P)^{\mathrm{t}} u = 0$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A \,. \end{aligned}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix A sind $\mathrm{M}_1(A) = 0$ und

$$\mathrm{M}_2(A) = \det(A) = -1 \,.$$

Mithin ist A weder positiv noch negativ definit, hat aber Determinante ungleich null.

Folglich ist $P = (1, -1, -1)$ eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Berechnen Sie nun das Integral

$$\int_2^3 \frac{4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} \, \mathrm{d}x \ .$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \cos(x^2) \, \mathrm{d}x \ .$$

Lösung.

(a) Multiplikation von $\frac{4}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$ mit $(x-1)^2(x+1)$ ergibt die Bedingung

$$4 \stackrel{!}{=} A(x^2-1) + B(x+1) + C(x^2-2x+1) = (A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C) \ .$$

Koeffizientenvergleich liefert für den Vektor $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Dieses bringen wir auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit folgt $A = -1$, $B = 2$ und $C = 1$.

Wir erhalten

$$\frac{4}{(x-1)^2 \cdot (x+1)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{4}{(x-1)^2\cdot(x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \frac{-1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + 2\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + \ln(x+1)\right]_2^3 \\
&= (-\ln(2) - \tfrac{2}{2} + \ln(4)) - (-\ln(1) - \tfrac{2}{1} + \ln(3)) \\
&= 1 + \ln(2) - \ln(3)\ .
\end{aligned}
$$

(b) Wir substituieren $u(x) := x^2$. Mit $u'(x) = 2x$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x &= \textstyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{u'(x)}{2}\cos(u(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= [\tfrac{1}{2}\sin(u)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Sei ein Sparvertrag geplant mit Startkapital $K_0 = 500$€. Es soll nachschüssig jährlich eine Rate von $R = 30$€ eingezahlt werden. Der Zinssatz betrage $p = 1\%$.

(1) Berechnen Sie das Guthaben nach einem Jahr.

(2) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 4000€ erreicht ist?

(b) Es soll ein Betrag K_0 auf einem Konto mit einem Zinssatz von 25% angelegt werden, also zu einem Zinsfaktor von $q = \frac{5}{4}$.

Jeweils zum Jahresende soll eine Auszahlung von 100€ getätigt werden.

Wie hoch muss K_0 sein, damit nach 2 Jahren das Kapital aufgebraucht ist, also $K_2 = 0$ ist?

Lösung.

(a) (1) Bei nachschüssiger Zahlung ist $K_n = q^n \cdot K_0 + \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R$.

Es ist $K_1 = 1{,}01 \cdot 500 + 30 = 535$.

Das Guthaben nach einem Jahr beträgt also 535€.

(2) Bei nachschüssiger Zahlung ist $n = \log_q \left(\dfrac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}} \right)$.

Mit $K_n = 4000$, $K_0 = 500$, $q = 1{,}01$ und $R = 30$ ergibt sich

$$n = \log_{1{,}01} \left(\frac{4000 + \frac{30}{0{,}01}}{500 + \frac{30}{0{,}01}} \right) = \log_{1{,}01} \left(\frac{7000}{3500} \right) = \log_{1{,}01}(2) \ .$$

(b) Bei nachschüssiger Zahlung gilt $K_0 = q^{-n} \left(K_n - \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \cdot R \right)$.

Für $n = 2$, $K_2 = 0$, $R = -100$ und $q = \frac{5}{4}$ ist somit

$$\begin{aligned} K_0 &= \left(\tfrac{5}{4}\right)^{-2} \left(0 - \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1}{\frac{5}{4} - 1} \cdot (-100) \right) \\ &= \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{\left(\frac{9}{16}\right)}{\frac{1}{4}} \cdot 100 \right) \\ &= \tfrac{16}{25} \cdot \tfrac{9}{4} \cdot 100 \\ &= 144 \ . \end{aligned}$$

Es wird somit ein Startkapital von 144€ benötigt.

Aufgabe 6 (2+1 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) := x^3$. Sei $x_0 := 1$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_2(x)$ von $f(x)$ um $x_0 = 1$ von Ordnung 2.

$$T_2(x) = \boxed{1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2}$$

(b) Geben Sie das Restglied $R_2(x)$ an, für welches $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ gilt für $x \in \mathbb{R}$. Hierbei soll das Restglied als Integral stehenbleiben.

$$R_2(x) = \boxed{3 \int_1^x (x-t)^2 \,\mathrm{d}t}$$

Aufgabe 7 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

$$\boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 8 (1+1+1+1 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Parameter. Seien $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_s = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(a) Berechnen Sie den Cosinus des von b_s und c eingeschlossenen Winkels φ.

$$\cos(\varphi) = \boxed{\tfrac{2}{3}}$$

(b) Berechnen Sie:

$$b_s \times c = \boxed{s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von b_s und c aufgespannten Parallelogramms in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\boxed{s\sqrt{5}}$$

(d) Bestimmen Sie $s \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass das Volumen des von a, b_s und c aufgespannten Parallelepipeds gleich 1 ist.

$$s = \boxed{\tfrac{1}{3}}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix:

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$
