Modulprüfung Höhere Mathematik 1/2
für el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**. Es können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel** sind 4 eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten sowie Zeichenmaterial. **Bücher, Fotokopien, elektronische Rechengeräte etc. sind nicht zugelassen.**
- Es gibt insgesamt 10 Aufgaben. Bei den **Aufgaben 5, 6, 9, 10** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
  Bei den **Aufgaben 1, 2, 3, 4, 7 und 8** sind nur die Kästchen auszufüllen, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer. Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen bis 31.10.2021 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten. Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (2+4 Punkte)

(a) Geben Sie die komplexe Zahl $\zeta = \dfrac{3-i}{1+2i}$ in der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$\zeta = \boxed{} + \boxed{}\, i$$

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 = -4 \quad \text{mit } \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Geben Sie die Lösungen sowohl in der Polardarstellung $re^{i\varphi}$ mit $r \in [0, \infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ als auch in der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an:

$$z_1 = \boxed{}\, e^{i\boxed{}} = \boxed{} + \boxed{}\, i, \quad z_2 = \boxed{}\, e^{i\boxed{}} = \boxed{} + \boxed{}\, i.$$

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Vereinfachen und berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+4n^3}{7n^3+\cos(n^4)+1} = \boxed{} = \boxed{}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{9n^2+1} - \sqrt{9n^2+5n-1} = \boxed{} = \boxed{}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3} = \boxed{} = \boxed{}$

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie die Summe folgender Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} = \boxed{}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n = \boxed{}$

Bestimmen Sie Konvergenzradius R und Konvergenzintervall I folgender Reihen:

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$: $R = \boxed{}$ $I = \boxed{}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$: $R = \boxed{}$ $I = \boxed{}$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{\cos(2x)-1}$.

(a) Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von f:

$f'(x) =$ $\boxed{}$

$f''(x) =$ $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie für f das Taylorpolynom zweiten Grades um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$T_2(x) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 (2+2+2+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + (\cos x)^2}$.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi x(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Geben Sie die Partialbruchzerlegung des folgenden rationalen Ausdrucks an:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

(d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_3^5 \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6 (2+3 Punkte)

Gegeben seien

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist die Matrix A_λ invertierbar?

(b) Wir setzen nun $\lambda = 0$. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$A_0 x = b.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 7 (1+1+2+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2y - 2xy + y^3$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

$\nabla f(x, y)^T =$

(b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f.

$H_f(x, y) =$

(c) Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

Stationäre Punkte:

(d) Geben Sie an, an welchen stationären Punkten ein lokales Minimum oder lokales Maximum vorliegt. Begründen Sie Ihre Behauptung mithilfe einer Rechnung.

Die Funktion f hat im Punkt ein

Mathematische Begründung:

Die Funktion f hat im Punkt ein

Mathematische Begründung:

Aufgabe 8 (3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie zugehörige Eigenvektoren:

Eigenwerte:

Eigenvektoren:

(b) Entscheiden Sie bei folgenden Aussagen, ob wahr *(W)* oder falsch *(F)* zutrifft, und geben Sie eine <u>kurze</u> Begründung an (ohne korrekte Begründung gibt es keine Punkte):

- Die Matrix A ist invertierbar

Begründung:

- Die Matrix A lässt sich diagonalisieren

Begründung:

- Die Matrix A ist negativ definit

Begründung:

Aufgabe 9 (2+5 Punkte)

(a) Skizzieren Sie die Menge

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 0\}$$

und beschriften Sie Ihre Skizze.

(b) Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion

$$f(x, y) = x - y^2$$

auf K. (*<u>Hinweis</u>*: $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$)

Bitte wenden.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Gegeben sei das vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ abhängige Vektorfeld $v_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v_\lambda(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy\cos(x^2y) + yz \\ x^2\cos(x^2y) - \lambda xz \\ xy + 3z^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Werte von λ, für die ein Potential f mit $\nabla f = v_\lambda$ existiert und geben sie jeweils ein solches f an.