Klausur zur Höheren Mathematik III

für **bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 18.04.2022 über das Online–Portal Campus (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.
- Information zur Klausureinsicht wird auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben. (`http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr/HM-Knarr-WS2122/`)

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:
Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen einen entsprechenden Termin vereinbaren (z.B. über das Kontaktformular der Kurswebsite). Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{\pi^2} \le x^2 + y^2 \le 1 \text{ und } \quad (x \ge 0 \text{ oder } y \ge 0) \right\}.$$

(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie A.

(b) (*2 Punkte*) Berechnen Sie

$$I = \iint_A \left(x^2 + y^2\right)^{-1} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben seien die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x,\ x^2 \leq z \leq y \right\},$$

$$g(x, y, z) := \left(x(\cos y)^2 + x^2yz, -xy^2z, z(\sin y)^2 + x^2y^2 \right).$$

Es bezeichne $S := \partial M$ die Oberfläche von M.

(a) (*3 Punkte*) Berechnen Sie das Volumen von M.

(b) (*1 Punkt*) Berechnen Sie die Divergenz von g.

(c) (*1 Punkt*) Berechnen Sie $A(g, S)$, den Ausfluss des Vektorfeldes g durch S.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' = -4e^{2x} + 6x^2 - 2x\ .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad h(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{\cos(3x)} \\ \dfrac{4}{\cos(3x)} \end{pmatrix}.$$

(a) (*6 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

(b) (*5 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x).$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ -\sin x & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) (*8 Punkte*) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.
