Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Menge

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{\pi^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } \quad (x \geq 0 \text{ oder } y \geq 0) \right\}.$$

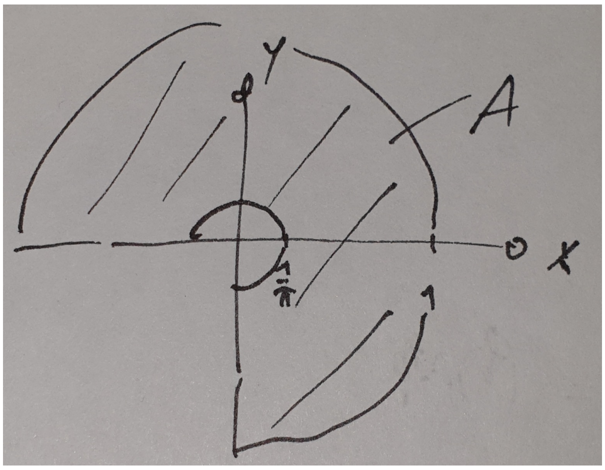
(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie A.

(b) (*2 Punkte*) Berechnen Sie

$$I = \iint_A \left(x^2 + y^2\right)^{-1} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Lösung

(a)



(b)

$$\begin{aligned}
I &= \iint_A \left(x^2 + y^2\right)^{-1} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{\pi}}^{1} \frac{1}{r^2} r \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{1}{\pi}}^{1} \frac{1}{r} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\ln(r)\right]_{\frac{1}{\pi}}^{1} \,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{\pi}\right) \,\mathrm{d}\varphi \\
&= \ln(\pi) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = \ln(\pi) \left[\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3}{2}\pi \ln(\pi)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben seien die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x,\ x^2 \leq z \leq y \right\},$$

$$g(x, y, z) := \left(x(\cos y)^2 + x^2yz, -xy^2z, z(\sin y)^2 + x^2y^2 \right).$$

Es bezeichne $S := \partial M$ die Oberfläche von M.

(a) (*3 Punkte*) Berechnen Sie das Volumen von M.

(b) (*1 Punkt*) Berechnen Sie die Divergenz von g.

(c) (*1 Punkt*) Berechnen Sie $A(g, S)$, den Ausfluss des Vektorfeldes g durch S.

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}
vol(M) &= \iiint_M 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_{x^2}^x \int_{x^2}^y \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^x [z]_{x^2}^y \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{x^2}^x y - x^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - yx^2 \right]_{x^2}^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + x^4 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{60} - \frac{15}{60} + \frac{10}{60} \\
&= \frac{1}{60}
\end{aligned}$$

(b)

$$\operatorname{div}(g) = \partial_1 g_1 + \partial_2 g_2 + \partial_3 g_3 = \cos^2(y) + 2xyz - 2xyz + \sin^2(y) = 1.$$

(c) Demnach ist

$$A(g, S) = \iint_S g \cdot n \,\mathrm{d}O = \iiint_M \operatorname{div}(g) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{60}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' = -4e^{2x} + 6x^2 - 2x \ .$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Lösung

SCHRITT 1: In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y = 0$. Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X$. Eine offensichtliche Nullstelle von P ist 0.

$$P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X = X(X^2 + 3X + 2) = X(X+1)(X+2)$$

hat die übrigen Nullstellen -1 und -2.

Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^{0\,x} + be^{-1\,x} + ce^{-2\,x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' = -4e^{2x} + 6x^2 - 2x$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' = 6x^2 - 2x$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' = -4e^{2x}$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y^{(3)}+3y^{(2)}+2y' = (6x^2-2x)e^{0\,x}$: Weil 0 eine (einfache) Nullstelle von P ist (Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = x^1(s_0 + s_1x + s_2x^2) = s_0\,x + s_1\,x^2 + s_2\,x^3.$$

  Dreimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_1}(x) &= s_0 + 2\,s_1\,x + 3\,s_2\,x^2, \\ f^{(2)}_{p_1}(x) &= 2\,s_1 + 6\,s_2\,x, \\ f^{(3)}_{p_1}(x) &= 6\,s_2. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$6\,s_2 + 3(2\,s_1 + 6\,s_2\,x) + 2(s_0 + 2\,s_1\,x + 3\,s_2\,x^2) = 6x^2 - 2x.$$

Damit ist $s_0 = 12$, $s_1 = -5$ und $s_2 = 1$. Also

$$f_{p_1}(x) = 12x - 5x^2 + x^3.$$

- Jetzt zu $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y' = -4e^{2x}$: Weil 2 keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

$$f_{p_2}(x) = s_0 e^{2x}.$$

Dreimaliges Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= 2\,s_0\,e^{2x}, \\ f^{(2)}_{p_2}(x) &= 4\,s_0\,e^{2x}, \\ f^{(3)}_{p_2}(x) &= 8\,s_0\,e^{2x}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

$$24\,s_0\,e^{2x} = -4e^{2x}.$$

Damit ist $s_0 = -1/6$. Also

$$f_{p_2}(x) = \frac{-1}{6}e^{2x}.$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = 12x - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{6}e^{2x}$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = a + b\,e^{-x} + c\,e^{-2x} + 12x - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{6}e^{2x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad h(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{\cos(3x)} \\ \dfrac{4}{\cos(3x)} \end{pmatrix}.$$

(a) (*6 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

(b) (*5 Punkte*) Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x).$$

Lösung

(a) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Die Lösung zum Anfangswert $y' = Ay, \quad y(0) = v_1$.

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A^2 v_1 = A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} = -9v_1.$$

Es ist $Q(X) = X^2 + 9$ mit Nullstellen $\pm 3i$. Deshalb:

$$M(x) = \begin{pmatrix} \sin(3x) & \cos(3x) \\ 3\cos(3x) & -3\sin(3x). \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-\top} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Lösung zum Anfangswertproblem

$$f_1 = \left(v_1 \,\middle|\, Av_1\right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \sin(3x) \\ \cos(3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3\sin(3x) + \cos(3x) \\ 5/3\sin(3x) \end{pmatrix}.$$

- Die Lösung zum Anfangswert $y' = Ay, \quad y(0) = v_2$.

$$Av_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A^2 v_2 = A \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} = -9v_2.$$

Es ist $Q(X) = X^2 + 9$ mit Nullstellen $\pm 3i$. Deshalb:

$$M(x) = \begin{pmatrix} \sin(3x) & \cos(3x) \\ 3\cos(3x) & 3\sin(3x). \end{pmatrix}, \quad M(0)^{-\top} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Lösung zum Anfangswertproblem

$$f_2 = \left(v_2 \,\middle|\, Av_2\right) M(0)^{-\top} \begin{pmatrix} \sin(3x) \\ \cos(3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3\sin(3x) \\ -4/3\sin(3x) + \cos(3x) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_{\mathrm{h}}(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 4/3\sin(3x) + \cos(3x) \\ 5/3\sin(3x) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5/3\sin(3x) \\ -4/3\sin(3x) + \cos(3x) \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Es ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} 4/3\sin(3x) + \cos(3x) & -5/3\sin(3x) \\ 5/3\sin(3x) & -4/3\sin(3x) + \cos(3x) \end{pmatrix}.$$

Deshalb, $W(x)^{-1} = \begin{pmatrix} -4/3\sin(3x) + \cos(3x) & 5/3\sin(3x) \\ -5/3\sin(3x) & 4/3\sin(3x) + \cos(3x) \end{pmatrix}$.

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_1'(x) \end{pmatrix} &= W(x)^{-1}h(x) \\ &= \begin{pmatrix} -4/3\sin(3x) + \cos(3x) & 5/3\sin(3x) \\ -5/3\sin(3x) & 4/3\sin(3x) + \cos(3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{5}{\cos(3x)} \\ \dfrac{4}{\cos(3x)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ \dfrac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)} + 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also kann man beispielsweise

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ \ln|\cos(3x)| + 4x \end{pmatrix}$$

wählen und erhält als eine partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = W(x)c(x) = \begin{pmatrix} 5x\cos(3x) - 5/3\ln|\cos(3x)|\sin(3x) \\ 3x\sin(3x) + 4x\cos(3x) - 4/3\sin(3x)\ln|\cos(3x)| + \cos(3x)\ln|\cos(3x)| \end{pmatrix}$$

Zusammen ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung zu

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) \\ &= c_1 \cdot \begin{pmatrix} 4/3\sin(3x) + \cos(3x) \\ 5/3\sin(3x) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5/3\sin(3x) \\ -4/3\sin(3x) + \cos(3x) \end{pmatrix} + \\ &\quad + \begin{pmatrix} 5x\cos(3x) - 5/3\ln|\cos(3x)|\sin(3x) \\ 3x\sin(3x) + 4x\cos(3x) - 4/3\sin(3x)\ln|\cos(3x)| + \cos(3x)\ln|\cos(3x)| \end{pmatrix} \\ &\quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

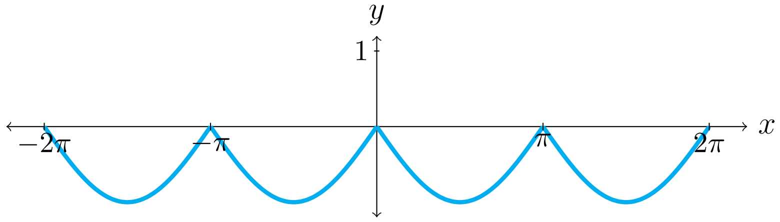
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ -\sin x & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) (*8 Punkte*) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

Lösung

(a)



(b) Die Funktion f ist gerade, folglich ist die Fourier-Reihe von f eine reine Cosinusreihe, d.h. es gilt

$$b_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ =& \frac{2}{\pi}\left([\cos x \cos(nx)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x(-n)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\ =& \frac{2}{\pi}\left((\cos\pi\cos(n\pi) - 1) - \left([\sin x(-n)\sin(nx)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x(-n^2)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \right) \\ =& \frac{2}{\pi}\left(((-1)(-1)^n - 1) + n^2 \int_0^\pi -\sin(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\ =& \frac{2}{\pi}((-1)^{n+1} - 1) + n^2 a_n \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$(1 - n^2)a_n = \frac{2}{\pi}((-1)^{n+1} - 1).$$

Für $n \neq 1$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} - 1}{1 - n^2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \dfrac{-4}{\pi(1-n^2)} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $n = 1$ gilt

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -\sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\cos(2x)\right]_0^\pi = 0.$$

Damit erhalten wir die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &\sim -\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-1}{1-n^2}\cos nx \\ &\sim -\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx). \end{aligned}$$