Prof. Dr. Klaus Höllig
2. Lehrstuhl
Mathematisches Institut A

9. März 1992

Schriftliche Prüfung zur Höheren Mathematik I - III

1. Klausur

Zugelassene Hilfsmittel: 30 handbeschriebene Blätter, HM-Skript
Bearbeitungszeit: 180 min.

Zu bearbeiten sind alle zehn Aufgaben. Jede Aufgabe hat dasselbe Gewicht. Alle wesentlichen Zwischenschritte sind anzugeben, die Angabe eines Ergebnisses alleine genügt nicht.

Beachten Sie die folgenden formalen Hinweise:

Fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an!

Alle Blätter dürfen nur einseitig beschrieben werden!

Die Prüfungsergebnisse hängen ab Mitte April im NWZ II beim Raum 8.155 aus.

Wichtiger Hinweis für Wiederholer: Informieren Sie sich bis spätestens 27. April 1992 über Ihr Prüfungsergebnis und vereinbaren Sie gegebenenfalls umgehend einen Termin für die mündliche Nachprüfung. Sie erhalten keine schriftliche Benachrichtigung.

Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren $a = (1, 2, 3)^t$ und $b = (-2, 3, 1)^t$.

a) Bestimmen Sie den Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ zwischen den beiden Vektoren.

b) Finden Sie orthogonale Vektoren $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$, welche dieselbe Ebene wie a und b aufspannen.

c) Ergänzen Sie $\{\tilde{a},\ \tilde{b}\}$ zu einer orthogonalen Basis $\{\tilde{a},\ \tilde{b},\ \tilde{c}\}$ des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die drei Vektoren $v_1 = (-2, 1, 1)^t$, $v_2 = (1, -2, 1)^t$ und $v_3 = (1, 1, -2)^t$.

a) Bestimmen Sie die Drehmatrix D mit $D\,v_1 = v_2$, $D\,v_2 = v_3$ und $D\,v_3 = v_1$.

b) Berechnen Sie D^3.

c) Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel von D.

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\cos x - 1}$.

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-x}$.

c) Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n^2}$ konvergent oder divergent? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $H(x,y) := \sin y + y + x^2 - x^3$.

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $H(x,y) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs nach $y = f(x)$ auflösbar ist.

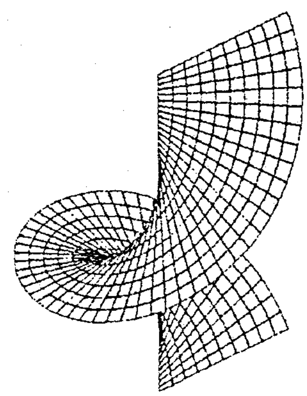
b) Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion f um den Nullpunkt bis zu Termen einschließlich 3. Ordnung.

c) Zeigen Sie, daß der Ursprung ein Extremum der Funktion f ist und bestimmen Sie dessen Charakter.

Aufgabe 5

Eine Fläche F sei gegeben durch

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (r\cos t, r\sin t, t),\ r \in [0,1],\ t \in [0,2\pi]\} .$$



a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $n(r,t)$ von F.

b) Berechnen Sie den Betrag $|\Phi|$ des Flusses des Vektorfelds $v := (y, -x, z)^t$ durch die Fläche F.

c) Die Randkurve der Fläche F besteht aus 3 Geradenstücken sowie der Schraubenlinie $C : t \mapsto (\cos t, \sin t, t)^t$. Berechnen Sie die Länge von C.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $y'(x) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

b) $y'(x) = \dfrac{2xy}{1 + x^2}$

c) $y'(x) = x + y$

Aufgabe 7

a) Überführen Sie mit Hilfe der Substitution $z = \exp(ix)$ das reelle Integral

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{3}{5 + 4\sin x}\, dx$$

in ein komplexes Kurvenintegral

$$I = \int_C f(z)dz \, .$$

b) Berechnen Sie dieses Kurvenintegral mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 8

Gegeben sei der Körper $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x, 0 \leq x\}$.

a) Beschreiben Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten (r, θ, z).

b) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers K.

c) Berechnen Sie den Fluß Φ des Vektorfeldes $v := (xy^2, yx^2, x^2y^2)^t$ durch die Oberfläche von K von innen nach außen.

Aufgabe 9

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi \le x \le 0 \\ x & \text{für} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad , \quad f(x+2\pi) = f(x) \,.$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f für $-3\pi \le x \le 3\pi$.

b) Bestimmen Sie die reelle und die komplexe Fourier-Reihe von f.

c) Berechnen Sie durch Wahl eines speziellen x-Wertes den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \,.$$

Aufgabe 10

Gegeben sei die singuläre analytische Differentialgleichung

$$2z^2 w''(z) - (z + 2z^2)w'(z) + w(z) = 0 \,.$$

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf die Form

$$w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0$$

und bestimmen Sie die Polstellen von $p(z)$ und $q(z)$ und deren Ordnung.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen $\lambda_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung.

Betrachten Sie von nun an *nur* denjenigen Exponenten λ mit dem kleineren Realteil.

c) Geben Sie eine Rekursionsformel an für die Koeffizienten c_k im Ansatz

$$w(z) = z^{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \,.$$

d) Bestimmen Sie für $c_0 := 1$ die Koeffizienten c_k explizit und geben Sie die zugehörige Lösung $w(z)$ in geschlossener Form an.