Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/8	/8	/12	/11	/10	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Seien $(f_k : [0,5] \to [-999, 999])_{k\in\mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit punktweiser Grenzfunktion f, also $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für jedes $x \in [0,5]$. Gilt dann $\lim_{k\to\infty} \int_0^5 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

2B. Gibt es eine stetige und 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Fourier–Koeffizienten die Ungleichung $|c_k| \ge 1/k^2$ für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ erfüllen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

/2

2C. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ besitze eine Basis aus Hauptvektorketten der Länge 2 und 3 zum Eigenwert $\lambda = 0$. Welche Dimension hat demnach der Kern von A?

Begründete Antwort:

/2

2D. Wir suchen die Lösungen $(u,v):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems $u'''=u'+3v$ und $v''=2v'-u$. Finden sich darunter sechs linear unabhängige Lösungen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

2E. Sie werfen unabhängig zwei faire Würfel. Sei A das Ereignis „Der erste Würfel zeigt Augenzahl 1“ und B das Ereignis „Der zweite Würfel zeigt Augenzahl 2“ sowie C das Ereignis „Beide Würfel zeigen dieselbe Augenzahl“. Ist die Familie (A,B,C) stochastisch unabhängig?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

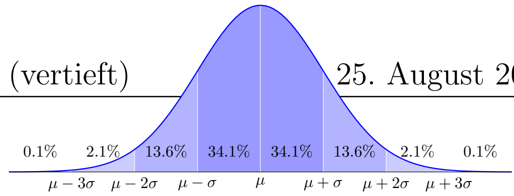
2

2F. Sie suchen $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $y\,\partial_x u(x,y)-x\,\partial_y u(x,y)=0$ und $u(x,0)=\cos(x)$. Aus $X'=Y$, $Y'=-X$ erhalten Sie Kreise um $(0,0)$ als Charakteristiken. Existiert demnach eine Lösung u?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

2

Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)



3A. Sie wiederholen 60 000 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit 60%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhalten Sie höchstens 36 180 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

3

3B. Ein Satellit hat 2 Gigabit Arbeitsspeicher. Während eines Betriebsintervalls beträgt die Fehlerwkt 10^{-9} pro Bit, unabhängig voneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie höchstens 2 Bitfehler? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

3

3C. Beim weltgrößten Skatturnier in Berlin nehmen 4% Profis und 96% Amateure teil. Die Wahrscheinlichkeit in die Finalrunde einzuziehen, ist für Profis 96%, für Amateure nur 16%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit r ist ein zufällig ausgewählter Finalist ein Profi?

$\overline{3}$

3D. Eine Datenbank hat 2 000 000 Datensätze. Parallele Prozesse schreiben gleichzeitig in 1 100 dieser Datensätze (gleichverteilt, unabhängig). Mit welcher Wkt s kommt es zu keiner Kollision?

$\overline{3}$

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichungen* (8 Punkte)

Zu lösen ist die homogene, lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0. \tag{L}$$

4A. Geben Sie das charakteristische Polynom p der Gleichung (L) an.

$p(x) =$

1

4B. Es gilt $p(2) = 0$. Zerlegen Sie das Polynom p in Linearfaktoren:

$p(x) =$

2

4C. Nennen Sie eine Basis des Raumes aller reellen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ von (L).

Basis:

2

4D. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $u(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^{t}$.

$u(t) =$

1

4E. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $v(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

$v(t) =$

1

4F. Schließen Sie auf eine partikuläre Lösung $w(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \cosh(t)$.

$w(t) =$

1

Aufgabe 5. *Partielle Differentialgleichungen* (8 Punkte)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die partielle Differentialgleichung

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} x\,\partial_x u(x,y) + y\,\partial_y u(x,y) = 2\,\dfrac{y}{x}\,\sqrt{u} & \text{für alle } x \geq 1 \text{ und } y \geq 0, \\ u(1,y) = y^2 & \text{für } x = 1 \text{ und alle } y \geq 0. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (1, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

5A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = X(s)$, $X(0) = 1$,

$Y'(s) = \boxed{}$, $Y(0) = y_0$,

$U'(s) = \boxed{}$, $U(0) = y_0^2$.

2

5B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$X(s) = \mathrm{e}^s$,

$Y(s) = \boxed{}$,

$U(s) = \boxed{}$.

3

5C. Bestimmen Sie zu $(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x, y)$ gilt:

$s = \boxed{}$, $y_0 = \boxed{}$.

2

5D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(\mathrm{e}, 3)$ gilt $u(\mathrm{e}, 3) = 36/\mathrm{e}^2$.

$u(x, y) =$

1

Aufgabe 6. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (12 Punkte)

Zu lösen ist das homogene, lineare Differentialgleichungssystem

$$\text{(H)}\quad \left\{\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 7y_4 \\ y_2' &= -y_1 + 5y_2 + 3y_3 - 5y_4 \\ y_3' &= - 7y_3 + 10y_4 \\ y_4' &= - 5y_3 + 8y_4 \end{aligned}\right.$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A, die das obige System in der Form $y' = A\,y$ darstellt.

$A = \boxed{}$

1

6B. Zur Matrix A und Eigenwert 3 ist $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$ ein Hauptvektor der Stufe $\boxed{}$.

Folgern Sie zur Matrix A die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2:

$\lambda_1 = \boxed{} > 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\boxed{}$

und

$\lambda_2 = \boxed{} < 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\boxed{}$

Bestimmen Sie zu A eine Jordan–Basis v_1, v_2, v_3, v_4:

$v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \boxed{}$, $v_3 = \boxed{}$, $v_4 = \boxed{}$

6

6C. Bestimmen Sie zu (H) die zugehörige Fundamentalmatrix $W:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{4\times4}:t\mapsto W(t)$.
Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4:t\mapsto w_k(t)$ von (H) mit Startvektor $w_k(0)=v_k$.

$$W(t)=\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{3t} & & & \\ \mathrm{e}^{3t} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

3

6D. Wir wählen den Startwert $y(0)\in\mathbb{R}^4$ zufällig, stetig verteilt um den Nullpunkt.
Wie verhält sich typischerweise die Lösung $t\mapsto y(t)$ für $t\to\infty$?

- ☐ $|y(t)|$ konvergiert gegen 0 für $t\to\infty$.
- ☐ $|y(t)|$ konvergiert nicht, bleibt aber beschränkt.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst polynomiell.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst exponentiell.

Begründung:

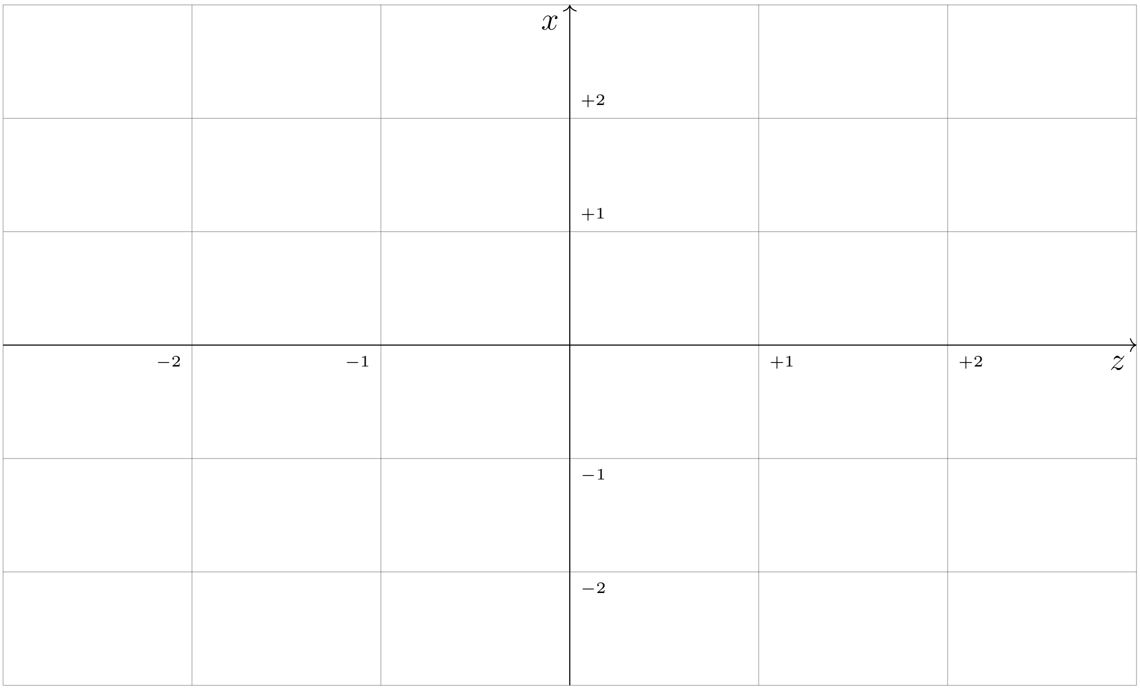
2

Aufgabe 7. *Integration über Körper und Flächen* (11 Punkte)

Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den folgenden Körper K und das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} z^2 \le 1 \\ \sin^2(\pi z) \le x^2 + y^2 \le 4\sin^2(\pi z) \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

7A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der z–x–Ebene $E = \{\, (x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \,\}$:



2

7B. Parametrisieren Sie K durch Zylinderkoordinaten $\Phi : D \xrightarrow{\sim} K : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$

und $D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \le z \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \boxed{} \le r \le \boxed{} \end{array} \right\}.$ 1

7C. Berechnen Sie das Volumen des Körpers K:

vol(K)

3

7D. Die Randfläche von K besteht aus der äußeren Fläche M und der inneren Fläche N.

Die äußere Fläche M wird parameterisiert durch $\Psi\begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Normalenvektor auf M (aus dem Körper K heraus):

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Psi}{\partial z} = \begin{pmatrix}\boxed{}\\ \boxed{}\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\boxed{}\\ \boxed{}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ \boxed{}\end{pmatrix}$$

2

7E. Bestimmen Sie das Flussintegral des Vektorfeldes f durch die äußere Fläche M aus dem Körper K heraus:

$$\int_M f \bullet \mathrm{d}M$$

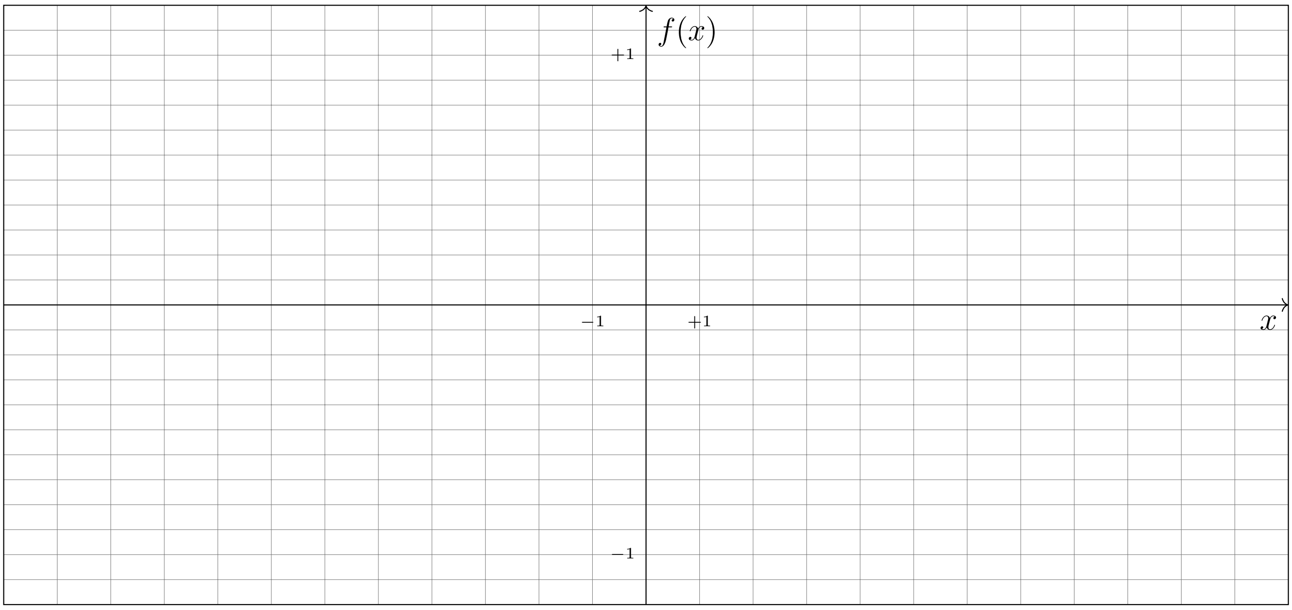
3

Tipp zur Probe: Es gilt $\int_N f \bullet \mathrm{d}N = -2\pi$ und der Gaußsche Integralsatz.

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (10 Punkte)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x)=\cos(x)$ für $0<x<\pi$.

8A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12,12]$:



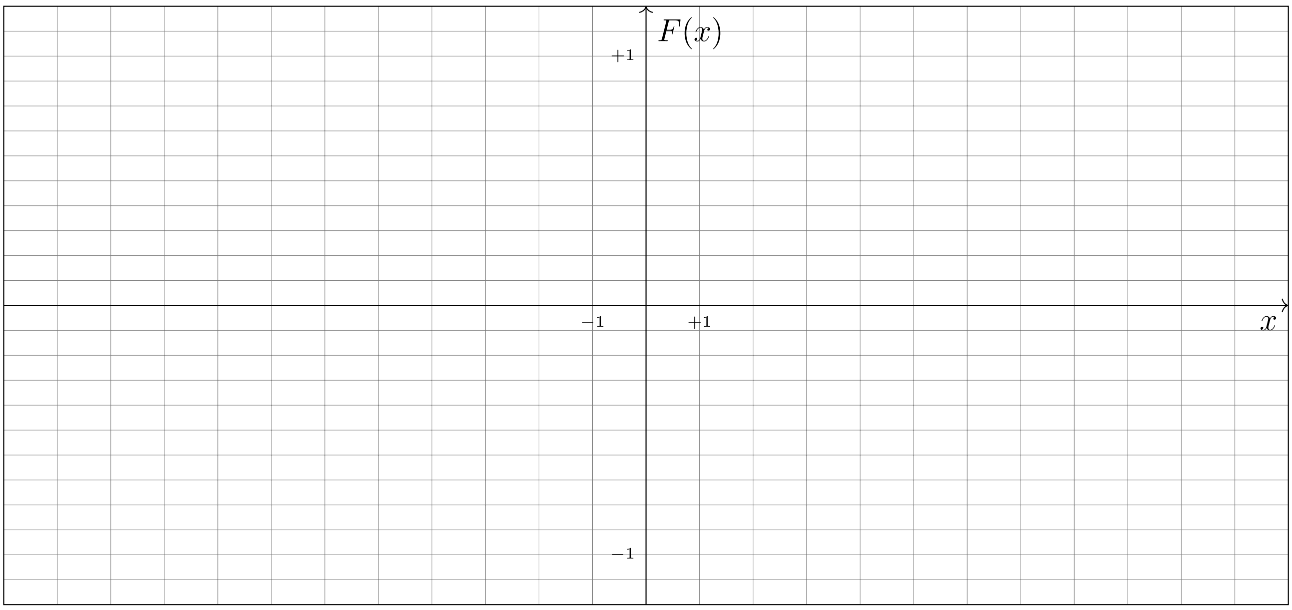
$\overline{}\ 1$

8B. Bestimmen Sie zur Fourier-Reihe $f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ den Wert der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2=$$

$\overline{}\ 1$

8C. Skizzieren Sie ebenso die Integralfunktion $F(x)=\int_{t=0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t$.



$\overline{}\ 1$

Hinweis: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$.

8D. Berechnen Sie die Koeffizienten b_k der Fourier–Sinus–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$:

$b_k =$

4

8E. Bestimmen Sie den exakten Wert der Summe $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n}{4n^2-1}\right)^2 \in [9.8, 9.9]$:

3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.