Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Betriebswirtschaftslehre (Prüfungsnummer 4199100000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–8** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **26.09.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot n!}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

Aufgabe 2 (4+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x^2 - 1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2(y-5) + y^3 - 12y$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y)$ und $\mathrm{H}_f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle von f, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Aufgabe 4 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) & := & \mathrm{e}^{xy} + yz \cdot \mathrm{e}^4 \\ g = g_1 & : & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) & := & x^3 + y^3 + 6xz - 16 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P := (2,2,0) \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Bitte wenden →

Aufgabe 5 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Seien 250€ zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt.
Zum Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beträgt das Kapital also $K(x) = 250 \cdot 1{,}05^x$.

(1) Berechnen Sie die Ableitung $K'(x)$.

(2) Bestimmen Sie die Elastizität $\mathrm{E}_K(x)$.

(b) Es wird zu Beginn ein Kredit in Höhe von 2100€ aufgenommen. Es ist also $K_0 = -2100$€. Es ist ein Zinssatz von 10% vereinbart worden, also ein Zinsfaktor von $q = \frac{11}{10}$. Es wurde nachschüssige Ratenzahlung vereinbart. Wie hoch muss die jährliche Rate R sein, damit der Kredit nach 2 Jahren abbezahlt ist, damit also $K_2 = 0$ ist?

Aufgabe 6 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} =$$

Aufgabe 7 (1+1+3 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s := \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie: $\det(A_s) =$

(b) Bestimmen Sie:

$$\{\, s \in \mathbb{R} \, : \, A_s \text{ ist invertierbar} \,\} =$$

(c) Bestimmen Sie für $s = 0$ die Inverse der Matrix A_0.

$$A_0^{-1} =$$

Bitte wenden →

Aufgabe 8 (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{x+2}$.
Sei $g := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto g(x) := \dfrac{x+1}{x}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqslant x \leqslant +3$.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von g.

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : y \mapsto g^{-1}(y) =$$

(c) Bestimmen Sie die Verkettung $g \circ f$.

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto (g \circ f)(x) =$$