Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Betriebswirtschaftslehre (Prüfungsnummer 4199100000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–8** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **26.09.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

Lösung.

(a) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \ .$$

(b) Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right) - 1 = \frac{1}{1-(-\frac{1}{5})} - 1 = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6} \ .$$

Aufgabe 2 (4+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x^2-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Eine Stammfunktion von $f(x) := x^2-1$ ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.

Außerdem gilt für $g(x) := \ln(x)$, dass $g'(x) = \frac{1}{x}$ ist.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} (x^2-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\ln(x)\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\ln(x)\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}x^2 - 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\ln(x)\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} - \left[\frac{1}{9}x^3 - x\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} \\
&= \left(\left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - \mathrm{e}\right) - 0\right) - \left(\left(\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \mathrm{e}\right) - \left(\frac{1}{9} - 1\right)\right) \\
&= \frac{2}{9}\mathrm{e}^3 - \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $u(x) := x^3 + x$ ist $u'(x) = 3x^2 + 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[2\sqrt{u}\right]_{u=2}^{10} = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \; (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2(y - 5) + y^3 - 12y$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle von f, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Lösung.

(a) Es ist

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(y-5) \\ x^2+3y^2-12 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y-10 & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix} \; .$$

(b) Eine Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Flachstelle von f, falls $\nabla_f(x, y) = 0$ gilt.

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x(y-5) &= 0 \\ x^2 + 3y^2 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

lösen.

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $x = 0$ oder $y = 5$ ist.

Fall 1: $x = 0$. Einsetzen in die 2. Gleichung verlangt, dass $3y^2 - 12 = 0$ ist, d.h. $y = -2$ oder $y = 2$.

Fall 2: $y = 5$. Einsetzen in die 2. Gleichung verlangt, dass $0 = x^2 + 75 - 12 = x^2 + 63$ ist. Da $x^2 \geqslant 0$ ist, ist dies unlösbar. Also liefert dieser Fall keine Flachstellen.

Wir erhalten somit die folgenden Flachstellen von f:

$$(0, -2)\,, \quad (0, 2)\,.$$

(c) Wir untersuchen die Flachstellen aus Teil (a).

Es ist $\mathrm{H}_f(0, -2) = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$. Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0, -2)) = -14 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0, -2)) = \det(\mathrm{H}_f(0, -2)) = 168 > 0$. Somit ist sie negativ definit. Also ist $(0, -2)$ eine lokale Maximalstelle von f.

Es ist $\mathrm{H}_f(0, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$. Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0, 2)) = -6 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0, 2)) = \det(\mathrm{H}_f(0, 2)) = -72 < 0$. Somit ist sie weder positiv noch negativ definit. Da zudem $\det(\mathrm{H}_f(0, 2)) \neq 0$ ist, ist $(0, 2)$ eine Sattelstelle von f.

Aufgabe 4 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) &:=& \; e^{xy} + yz \cdot e^4 \\ g = g_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) &:=& \; x^3 + y^3 + 6xz - 16 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $H_f(x,y,z)$ und $H_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P := (2,2,0) \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} \\ xe^{xy}+z\cdot e^4 \\ y\cdot e^4 \end{pmatrix}$ und $\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+6z \\ 3y^2 \\ 6x \end{pmatrix}$.

Es ist

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2e^{xy} & xye^{xy}+e^{xy} & 0 \\ xye^{xy}+e^{xy} & x^2e^{xy} & e^4 \\ 0 & e^4 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 6 \\ 0 & 6y & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Wir stellen das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können. Für ein $\rho \in \mathbb{R}$ soll $\nabla_f(x,y,z) = \rho \cdot \nabla_g(x,y,z)$ und $g(x,y,z) = 0$ gelten.

Dies liefert das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} ye^{xy} &= \rho \cdot (3x^2 + 6z) \\ xe^{xy} + z \cdot e^4 &= \rho \cdot 3y^2 \\ y \cdot e^4 &= \rho \cdot 6x \\ x^3 + y^3 + 6xz - 16 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Einsetzen des Punktes $P = (2,2,0) \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$\begin{aligned} 2e^4 &= \rho \cdot 12 \\ 2e^4 &= \rho \cdot 12 \\ 2e^4 &= \rho \cdot 12 \\ 0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dies wird durch $\rho = \frac{e^4}{6}$ gelöst.

Da $N(P) = \nabla_g(P) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ nur aus einer Spalte ungleich null besteht, ist das Spaltentupel von $N(P)$ linear unabhängig.

Somit ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \rho = \frac{e^4}{6}$.

(d) Wir untersuchen, ob P eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Es ist $H = \mathrm{H}_f(P) - \rho \cdot \mathrm{H}_g(P) = \begin{pmatrix} 4e^4 & 5e^4 & 0 \\ 5e^4 & 4e^4 & e^4 \\ 0 & e^4 & 0 \end{pmatrix} - \frac{e^4}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^4 \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen eine Matrix U, deren Spaltentupel eine Basis von

$$\{u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : N(P)^{\mathrm{t}} u = 0\} = \{u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} u = 0\}$$

ist.

Eine Basis des Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $N(P)^{\mathrm{t}} u = 0$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^4 \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^4 \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^4 \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =: A . \end{aligned}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix A sind $\mathrm{M}_1(A) = -6e^4 < 0$ und

$$\mathrm{M}_2(A) = \det(A) = -25e^8 < 0 .$$

Mithin ist A weder positiv noch negativ definit, hat aber Determinante ungleich null.

Folglich ist $P = (2, 2, 0)$ eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 5 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Seien 250€ zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt.
Zum Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beträgt das Kapital also $K(x) = 250 \cdot 1{,}05^x$.

(1) Berechnen Sie die Ableitung $K'(x)$.

(2) Bestimmen Sie die Elastizität $\mathrm{E}_K(x)$.

(b) Es wird zu Beginn ein Kredit in Höhe von 2100€ aufgenommen. Es ist also $K_0 = -2100$€. Es ist ein Zinssatz von 10% vereinbart worden, also ein Zinsfaktor von $q = \frac{11}{10}$. Es wurde nachschüssige Ratenzahlung vereinbart. Wie hoch muss die jährliche Rate R sein, damit der Kredit nach 2 Jahren abbezahlt ist, damit also $K_2 = 0$ ist?

Lösung.

(a) (1) Es ist $K(x) = 250 \cdot 1{,}05^x = 250 \cdot \mathrm{e}^{x \ln(1{,}05)}$ und daher

$$K'(x) = 250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot \mathrm{e}^{x \ln(1{,}05)} = 250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot 1{,}05^x \ .$$

(2) Es ist $\mathrm{E}_K(x) = \dfrac{K'(x)}{K(x)} \cdot x = \dfrac{250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot 1{,}05^x}{250 \cdot 1{,}05^x} = \ln(1{,}05) \cdot x$.

(b) Bei nachschüssiger Zahlung gilt $R = \dfrac{q-1}{q^n - 1} \cdot (K_n - q^n K_0)$.

Für $n = 2$, $K_2 = 0$, $K_0 = -2100$ und $q = \frac{11}{10}$ ist somit

$$\begin{aligned} R &= \frac{\frac{11}{10} - 1}{\left(\frac{11}{10}\right)^2 - 1} \cdot (0 - (\tfrac{11}{10})^2 \cdot (-2100)) \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{21}{100}} \cdot \tfrac{121}{100} \cdot 2100 \\ &= \tfrac{10}{21} \cdot \tfrac{121}{100} \cdot 2100 \\ &= 1210 \ . \end{aligned}$$

Es wird somit eine Rate von 1210€ benötigt.

Aufgabe 6 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 7 (1+1+3 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s := \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie: $\det(A_s) = (s-1)^2$

(b) Bestimmen Sie:

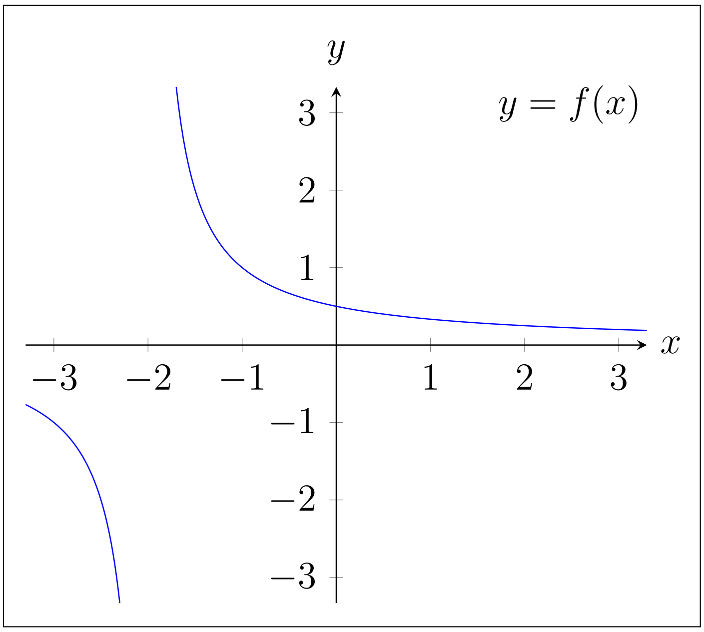
$$\{\, s \in \mathbb{R} \,:\, A_s \text{ ist invertierbar} \,\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

(c) Bestimmen Sie für $s = 0$ die Inverse der Matrix A_0.

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{x+2}$.
Sei $g := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto g(x) := \dfrac{x+1}{x}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqslant x \leqslant +3$.



(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von g.

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : y \mapsto g^{-1}(y) = \boxed{\frac{1}{y-1}}$$

(c) Bestimmen Sie die Verkettung $g \circ f$.

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto (g \circ f)(x) = \boxed{x+3}$$