Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen
el, kyb, mecha, phys, tpel

Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift.**
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **180 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- In dieser Klausur können bis zu **60 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 24 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1 *(2+2+2+2+2)*

a) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 = -16.$$

Geben Sie die Lösungen in Polarkoordinaten an.

b) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 9y' + 8y = 0.$$

c) Bestimmen Sie eine Lösung $y = y(t)$ der Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

d) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

e) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion des Punktes $P = (2, -4, 1)$ auf die Ebene E.

Lösung

a) Eine komplexe Zahl z hat in Polarkoordinaten die Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir setzen dies in die Gleichung ein und erhalten

$$r^4 e^{4i\varphi} = -16.$$

Damit muss $r^4 = 16$ und $e^{4i\varphi} = -1$ erfüllt sein. Daraus ergibt sich für φ die Bedingung

$$4i\varphi = i\pi.$$

Daraus erhalten wir $r = 2$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_3 = \frac{5\pi}{4}$ und $\varphi_4 = \frac{7\pi}{4}$.
Die Lösungen sind damit

$$z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad z_2 = 2e^{\frac{3i\pi}{4}}, \quad z_3 = 2e^{\frac{5i\pi}{4}} \quad \text{und} \quad z_4 = 2e^{\frac{7i\pi}{4}}.$$

b) Wir machen den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. Dadurch ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda + 8.$$

Dieses besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -8$.
Damit ist die allgemeine reelle Lösung gegeben durch

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-8t}, \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Sei $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-8t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung mit der Nebenbedingung $y'(0) = 1$ und $y(0) = 0$. Die Nebenbedingungen ergeben ein lineares Gleichungssystem für c_1 und c_2. Dies ist gegeben durch

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{und} \quad -c_1 - 8c_2 = 1.$$

Lösen des LGS liefert $c_1 = \frac{1}{7}$ und $c_2 = -\frac{1}{7}$.
Damit ist $y(t) = \frac{1}{7}e^{-t} - \frac{1}{7}e^{-8t}$ die gesuchte Lösung.

d) Wir bestimmen einen Normalenvektor

$$n = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

indem wir das Skalarprodukt von n mit den beiden Richtungsvektoren gleich 0 setzen und das daraus resultierende lineare Gleichungssystem lösen. Es muss $2v_1 + v_2 = 0$ und $-v_1 + 2v_3 = 0$. Für n ergibt sich so beispielsweise

$$n = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. normiert} \quad n = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Normalenform ist dann mit dem normierten Normalenvektor n gegeben durch

$$E : \frac{1}{\sqrt{21}} (2x_1 - 4x_2 + x_3) = 0,$$

da der Stützvektor auf der Ebene dem Ursprung entspricht.

e) Wie in Teilaufgabe d) berechnet, steht der Punkt P senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren. Dadurch muss die Orthogonalprojektion des Punktes P auf die Ebene E gleich dem Ursprung entsprechen.
Alternative: Dies kann aber auch ausführlich berechnet werden. Dazu orthonormieren wir die beiden Richtungsvektoren der Ebene zunächst mit Gram-Schmidt. Es ist

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Als Orthogonalprojektion ergibt sich so

$$P\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}-1\\2\\10\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}-1\\2\\10\end{pmatrix}$$

$$= 0\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{105}}\begin{pmatrix}-1\\2\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(6+4)*

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+8}-\sqrt{n})$, ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cos(x)}{\sin(x)-x}$, iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{\cosh(t)}{7+t^5}dt.$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2+9x+8}dx.$$

Lösung

a) i) Wir nutzen die dritte binomische Formel

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+8}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+8}-\sqrt{n})(\sqrt{n+8}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+8}+\sqrt{n})}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+8-n}{(\sqrt{n+8}+\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{8}{(\sqrt{n+8}+\sqrt{n})} = 0.$$

ii) Wir wenden die Regel von L'Hopital dreimal an

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos(x)}{\sin(x)-x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cos(x)-x^3\sin(x)}{\cos(x)-1}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x\cos(x)-6x^2\sin(x)-x^3\cos(x)}{-\sin(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{6\cos(x)-18x\sin(x)-9x^2\cos(x)+x^3\sin(x)}{-\cos(x)}$$
$$= -6.$$

iii) Mit der Regel von L'Hopital und dem Fundamentalsatz der Integralrechnung erhalten wir

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cosh(t)}{7+t^5}dt = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cosh(x)}{7+x^5}}{1} = \frac{1}{7}.$$

Alternative: Wir erhalten mit dem Mittelwertsatz

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\cosh(t)}{7+t^5}dt = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh(\xi)}{7+\xi^5}$$

für ein $\xi \in [0, x]$. Für $x \to 0$ muss auch $\xi \to 0$ gelten und somit ist der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\cosh(t)}{7+t^5} dt = \lim_{\xi\to 0} \frac{\cosh(\xi)}{7+\xi^5} = \frac{1}{7}.$$

b) Wir benutzen dazu die Partialbruchzerlegung. Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind $x_1 = -1$ und $x_2 = -8$. (Diese wurden schon in Aufgabe 1 b) berechnet.)
Der Nennergrad ist größer als der Zählergrad. Daher machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{x^2+9x+8} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+8}.$$

Daraus folgt

$$1 = A(x+8) + B(x+1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $x = -1$ und $x = -8$ liefert $A = \frac{1}{7}$ und $B = -\frac{1}{7}$.
Damit ist

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{x^2+9x+8} dx &= \frac{1}{7}\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{7}\int_2^3 \frac{1}{x+8} dx = \frac{1}{7}[\ln(|x+1|)]_2^3 - \frac{1}{7}[\ln(|x+8|)]_2^3 \\ &= \frac{1}{7}\ln(4) - \frac{1}{7}\ln(3) - \frac{1}{7}\ln(11) + \frac{1}{7}\ln(10) = \frac{1}{7}\ln\left(\frac{40}{33}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(2+3+1+1+3)*

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ von A an.

b) Geben Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_1, v_2, v_3 an, so dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass $D = S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.

d) Bestimmen Sie die allgemeine, reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$.

e) Um welche Art von Quadrik handelt es sich bei $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x^T Ax = 3\}$.

Lösung

a) Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (9-\lambda)\det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) = (9-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 9\right) \\ &= (9-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 9) = -54\lambda + 15\lambda^2 - \lambda^3 = (9-\lambda)\lambda(\lambda-6)\end{aligned}$$

b) Für die Eigenwerte muss $p_A(\lambda) = 0$ gelten. Daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 9 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 6.$$

Da die Matrix symmetrisch ist, stehen die Eigenräume direkt orthogonal aufeinander. Es genügt also die normierten Eigenvektoren zu bestimmen und sie nicht über Gram-Schmidt zu einer Orthonormalbasis zu erweitern. Es ist

- Der Eigenvektor zu $\lambda = 0$ berechnet sich durch $(A - 0I)v_1 = 0$ und ist $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Der Eigenvektor zu $\lambda = 9$ ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Der Eigenvektor zu $\lambda = 6$ ist $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Da in b) schon eine ONB an Eigenvektoren bestimmt wurde, sieht die Transformationsmatrix S folgendermaßen aus

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

mit der Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

d) Die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt sich direkt durch die Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

e) Um die Art der Quadrik zu bestimmen, bringen wir $x^T A x = 3$ auf die Normalform. Sei dazu $x = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$x^T A x = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 3c & 9b & 3a + 3c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$
$$= 3a^2 + 3ac + 9b^2 + 3ac + 3c^2 = 3.$$

Daraus erhalten wir

$$(a+c)^2 + 3b^2 = 1,$$

was einem elliptischem Zylinder entspricht.

Aufgabe 4 *(2+2+2+4)*

Gegeben sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^n x^n$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(x)$.

b) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f(0), f'(0), f''(0)$ und $f^{(100)}(0)$.

c) Überprüfen Sie, ob Konvergenz in den Randwerten $x = R$ und $x = -R$ vorliegt.

d) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} x^{-2/3} e^{-x^2} dx$$

konvergent ist.

Hinweis: Spalten Sie dazu das Integral auf in $\int_0^1 ...dx + \int_1^{\infty} ...dx$.

a) Um den Konvergenzradius R zu berechnen, setzen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ über $a_n = \frac{1}{1+n^2} e^n$. Dann ergibt sich der Konvergenzradius durch den Quotienten

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{1+n^2} e^n}{\frac{1}{1+(n+1)^2} e^{n+1}} \right| \qquad = \left| \frac{1}{e} \frac{1+(n+1)^2}{1+n^2} \right|.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert dies gegen den Konvergenzradius $R = \frac{1}{e}$.

b) Die Taylorreihe von f im Punkt $x = 0$ ist allgemein

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit der Potenzreihe ergibt sich

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{1+n^2} e^n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(0) &= \frac{1}{2} e^1, \\ f''(0) &= \frac{2}{5} e^2, \\ f^{(100)}(0) &= \frac{100!}{1+100^2} e^{100}. \end{aligned}$$

c) Für $x = R = \frac{1}{e}$ ergibt sich die Potenzreihe

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^n \left(\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Damit konvergiert die Potenzreihe durch das Majorantenkriterium. Damit konvergiert die Reihe auch absolut.

Für $x = -R = -\frac{1}{e}$ haben wir die Potenzreihe

$$f\left(-\frac{1}{e}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^n \left(-\frac{1}{e}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Es ist $\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right)_{n\geq 0}$ alternierend und die Folge $\left(\frac{1}{1+n^2}\right)_{n\geq 0}$ ist eine monoton fallende, reelle Nullfolge. Somit konvergiert die Potenzreihe nach dem Leibniz-Kriterium. Sie konvergiert aber auch absolut nach der Berechnung für $x = R$.

d) Nach dem Hinweis spalten wir das Integral in

$$\int_0^{\infty} x^{-2/3} e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^{-2/3} e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} x^{-2/3} e^{-x^2} dx = I_1 + I_2.$$

- Für $x \in [0,1]$ kann e^{-x^2} durch 1 abgeschätzt werden.
  Es ist damit

$$I_1 = \int_0^1 x^{-2/3} e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 x^{-2/3} \cdot 1 dx = \left[3x^{1/3}\right]_0^1 = 3 < \infty.$$

- Für $1 \leq x \leq \infty$ gilt $x \leq x^2$. Damit ist $-x^2 \leq -x$ und, da die e-Funktion monoton ist, folgt $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.
  Außerdem ist für $1 \leq x \leq \infty$ der Bruch $\frac{1}{x^{2/3}}$ durch 1 beschränkt. Somit erhalten wir

$$I_2 = \int_1^{\infty} x^{-2/3} e^{-x^2} dx \leq \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{e} < \infty$$

  Für I_1 und I_2 existieren somit obere Grenzen und dadurch ist das Integral konvergent nach dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 5 *(1+1+2+2+4)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + xy + x^7y^5 + 6x^{22} - x^2y^{108}$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f.

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0,0)$.

c) Bestimmen Sie für den stationären Punkt $(0,0)$ von f, ob f dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt besitzt. Geben Sie eine mathematische Begründung für Ihre Entscheidung.

d) Geben Sie für f das Taylorpolynom T_{10} der zehnten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ an.

e) Gegeben seien die Funktionen $h,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $h(x,y)=x^2+4y^2$ und $g(x,y)=9x^2+y^2$. Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Wert der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x,y)=1$.

Lösung

a) Der Gradient ist

$$\operatorname{grad}f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y+7x^6y^5+132x^{21}-2xy^{108} & x+5x^7y^4-108x^2y^{107}\end{pmatrix}.$$

b) Die Hesse-Matrix $H_f(x,y)$ ist gegeben durch

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2+42x^5y^5+132\cdot 21x^{20}-2y^{108} & 1+35x^6y^4-216xy^{107}\\ 1+35x^6y^4-216xy^{107} & 20x^7y^3-108\cdot 107x^2y^{106}\end{pmatrix}.$$

Ausgewertet im Punkt $(0,0)$ sieht sie so

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

aus.

c) Es ist $\operatorname{grad}f(0,0)=0$. Somit liegt bei $(0,0)$ ein kritischer Punkt vor.
Für die Determinante von $H_f(0,0)$ gilt

$$\det(H_f(0,0))=-1<0.$$

Somit liegt nach dem Hurwitz-Kriterium ein Sattelpunkt in $(0,0)$ vor.
Alternative: Es können auch die Eigenwerte $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$ berechnet werden, wodurch die Matrix indefinit ist, da diese verschiedene Vorzeichen haben. Somit muss ebenso ein Sattelpunkt vorliegen.

d) Das Taylorpolynom T_{10} der zehnten Stufe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ ist gleich

$$T_{10}(f,(x,y),(0,0))=x^2+xy,$$

da alle anderen Terme von höherer Ordnung sind. Wenn $x=0$ und $y=0$ eingesetzt wird, so verschwinden alle Ableitungen von diesen.

e)
- Es ist $Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 18x & 2y \end{pmatrix}$. Also gilt $\text{Rang}(Jg(x,y)) \neq 1$ genau dann, wenn $x = y = 0$ gilt. Da $g(0,0) = 0 \neq 1$ ist, folgt $\text{Rang}(Jg(x,y)) = 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = 1$. Somit können alle Punkte, in denen h ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ annimmt, mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes berechnet werden.
- Das bedeutet, alle Extremstellen sind Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla h(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) &= 0, \\ g(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

  Das ergibt die folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned} 2x + 18\lambda x &= 0, && (1) \\ 8y + 2\lambda y &= 0, && (2) \\ 9x^2 + y^2 &= 1. && (3) \end{aligned}$$

- Aus (1) folgt $x = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{9}$. Aus (2) folgt $y = 0$ oder $\lambda = -4$. Deswegen muss $x = 0$ oder $y = 0$ gelten. Ist $x = 0$, so folgt aus (3), dass $y = \pm 1$ gilt.
  Wenn $y = 0$ ist, so muss nach (3) gelten, dass $x = \pm\frac{1}{3}$ ist. Die Extremstellen unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ sind somit $(0, \pm 1)$ und $(\pm\frac{1}{3}, 0)$.
- Einsetzen der Extremstellen in die Funktion h liefert

$$h(0, \pm 1) = 4 \quad \text{und} \quad h(\pm\frac{1}{3}, 0) = \frac{1}{9}.$$

  Der maximale Wert der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ beträgt somit 4. Der minimale Wert der Funktion h unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 1$ beträgt somit $\frac{1}{9}$.

Aufgabe 6 *(2+2+1+3+2)*

Gegeben seien das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und die Kurve $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}, \qquad c(t) = (3, \sin(t), \cos(t))$$

a) Bestimmen Sie das Wegintegral zweiter Art

$$\int_c < f(X), dX > .$$

b) Begründen Sie, wieso Wegintegrale zweiter Art über f wegunabhängig sind und berechnen Sie

$$\int_\gamma < f(X), dX >,$$

wobei γ ein Weg ist, der von $(1,1,1)$ nach $(3,2,4)$ läuft.

c) Wir betrachten

$$g(x,y) = e^{y-x} + 5y - 3x^2 - 1 = 0.$$

Wieso existiert in einer Ungebung des Punktes $(0,0)$ eine eindeutige Auflösung $y = y(x)$.

d) Bestimmen Sie dann $y'(0)$ und $y''(0)$ durch implizites Differenzieren.

e) Bestimmen Sie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+2}$.

Lösung

a) Es ist

$$\int_c \langle f(X), dX\rangle = \int_0^{2\pi} \langle f(c(t)), \dot{c}(t)\rangle \, dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ \sin^2(t) \\ \cos^2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t) - \cos^2(t)\sin(t) dt.$$

Über Integration mit Substitution mit $u = \sin(t)$ und $du = \cos(t)dt$ beziehungsweise im zweiten Fall $v = \cos(t)$ und $dv = -\sin(t)dt$ ergibt sich mit Rücksubstituton am Ende

$$\int \sin^2(t)\cos(t) - \cos^2(t)\sin(t)dt = \int u^2 du + \int v^2 dv = \left[\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{3}v^3\right] = \left[\frac{1}{3}\sin^3(t) + \frac{1}{3}\cos^3(t)\right].$$

Damit ist

$$\int_c \langle f(X), dX\rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t) - \cos^2(t)\sin(t)dt = \left[\frac{1}{3}\sin^3(t) + \frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_0^{2\pi}$$
$$= 0 + \frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{3} = 0.$$

Alternative: Sei das Potential $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3$.
Es ist $\nabla(\Phi) = f$ und somit

$$\int_c \langle f(X), dX\rangle = \Phi(c(2\pi)) - \Phi(c(0)) = \frac{1}{2}3^2 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}3^2 - 0 - \frac{1}{3} = 0.$$

b) Es gilt

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix} = 0$$

und $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Somit ist das Integral wegunabhängig.
Sei das Potential $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3$. Es ist $\nabla\Phi = f$ und somit ist f ein Gradientenfeld und das Integral wegunabhängig. Damit ist

$$\int_c \langle f(X), dX\rangle = \Phi(3, 2, 4) - \Phi(1, 1, 1) = \frac{9}{2} + \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 4 + \frac{70}{3} = \frac{82}{3}.$$

c) Es ist $g(0, 0) = 0$ und $\partial_y g(x, y) = e^{y-x} + 5 \neq 0$. Somit gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Auflösung $y = y(x)$ in einer Umgebung um den Punkt $(0, 0)$.

d) Wir haben

$$\frac{d}{dx}g(x, y(x)) = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da die partielle Ableitung von g nach y nie 0 ist, folgt somit

$$y'(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{-e^{y-x} - 6x}{e^{y-x} + 5}.$$

Somit ist $y'(0) = \frac{e^{y(0)}}{e^{y(0)}+5} = \frac{1}{6}$.
Für die zweite Ableitung benötigen wir

$$0 = \frac{d^2}{dx^2}g(x, y(x)) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Es ist

$$0 = e^{y-x} - 6 + 2(-e^{y-x})y'(x) + e^{y-x}y'(x)^2 + (e^{y-x} + 5)y''(x)$$

Für $x = 0$ folgt daher

$$0 = 1 - 6 - \frac{1}{3} + \frac{1}{36} + 6y''(0)$$

und damit

$$y''(0) = \frac{191}{216}.$$

Alternative für die zweite Ableitung: Mit den Formeln ist

$$y''(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial g}{\partial y}}.$$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$y''(0) = -\frac{e^{y(0)} - 6 - 2e^{y(0)}\frac{e^{y(0)}}{e^{y(0)}+5} + e^{y(0)}\left(\frac{e^{y(0)}}{e^{y(0)}+5}\right)^2}{e^{y(0)} + 5} = -\frac{1 - 6 - \frac{1}{3} + \frac{1}{36}}{6} = \frac{191}{216}.$$

e)
- Mit der geometrischen Reihe erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{e}{e+1}.$$

- Man kann x^2 aus der Summe ziehen und erhält

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+2} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = x^2 e^x$$

durch die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.