Aufgabe 1 (9 Punkte)

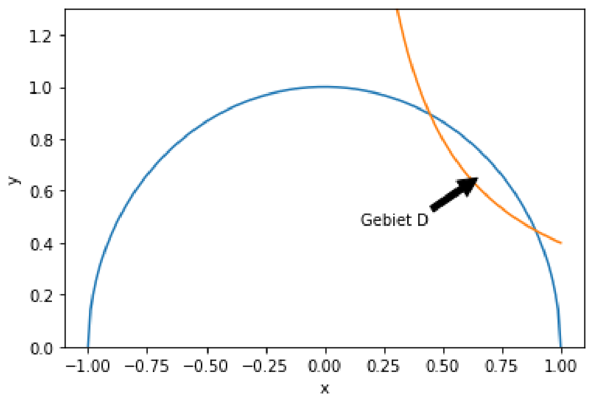
Der Bereich D liegt in der oberen Halbebene. Er wird von den Kurven $x^2 + y^2 = 1$ und $xy = \frac{2}{5}$ eingeschlossen.

a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie D.

b) (*3 Punkte*) Stellen Sie D jeweils als Normalbereich bezüglich der x- und der y-Achse dar.

c) (*4 Punkte*) Berechnen Sie $I = \iint_D xy\,dx\,dy$.

Lösung

a) 

b) Mit $x = \frac{2}{5y}$ und $x^2 + y^2 = 1$ folgt $y^4 - y^2 + \frac{4}{25} = 0$. Substitution von $u = y^2$ erlaubt Einsetzen in die Lösungsformel $u_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, was wiederum mit Rücksubstitution die y-Koordinaten der beiden Schnittpunkte $y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $y_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ liefert.

Damit können wir das Gebiet D als y-Normalbereich angeben:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{5}} \le y \le \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5y} \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\}.$$

Aufgrund der Symmetrie ist das Gebiet entsprechend als x-Normalbereich:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{5}} \le x \le \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{5x} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}.$$

c) Berechnung über y-Normalbereich:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy\,dx\,dy \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \int_{\frac{2}{5y}}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\,dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}} x - x^3\; dx - \frac{2}{25}\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{1}{x}\; dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}}}_{=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\frac{16}{25}+\frac{1}{4}\frac{1}{25}\right)} - \frac{2}{25}\left[\ln(x)\right]_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}} \\
&= \frac{3}{40} - \frac{2}{25}(\ln(2/\sqrt{5}) - \ln(1/\sqrt{5})) \\
&= \frac{3}{40} - \frac{2}{25}\ln(2)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1 + 10\cos x.$$

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung.

Lösung

SCHRITT 1: In einem ersten Schritt löst man die homogene Gleichung $y''-3y'+2y = 0$.

Das charakteristische Polynom $P(X)$ dieser Differentialgleichung ist $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Eine offensichtliche Nullstelle von P ist 1. Es ergibt sich

$$P(X) = (X-1)(X-2)$$

mit der weiteren Nullstelle 2.

Die allgemeine homogene Lösung f_h ist dann:

$$f_h(x) = ae^x + be^{2x}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

SCHRITT 2: In einem zweiten Schritt bestimmt man nun irgendeine beliebige (partikuläre) Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung durch einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Partikuläre Lösung durch Ansatz nach Art der rechten Seite

Aufgrund des Superpositionsprinzips bekommt man eine partikuläre Lösung f_p von $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1 + 10\cos x$, indem man eine partikuläre Lösung f_{p_1} von $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$ und eine partikuläre Lösung f_{p_2} von $y'' - 3y' + 2y = 10\cos x$ bestimmt und diese beiden addiert: $f_p = f_{p_1} + f_{p_2}$.

- Zunächst zu $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$:

  Weil 0 keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_1}(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2.$$

  Zweimaliges Ableiten ergibt

  $$f'_{p_1}(x) = s_1 + 2s_2 x,$$
  $$f''_{p_1}(x) = 2s_2.$$

  Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$2s_2x^2 + (2s_1 - 6s_2)x + 2s_0 - 3s_1 + 2s_2 = 2x^2 + 1$$

  und damit $s_0 = 4$, $s_1 = 3$ und $s_2 = 1$. Also

  $$f_{p_1}(x) = 4 + 3x + x^2.$$

- Jetzt zu $10\cos x$: Weil i keine Nullstelle von P ist (keine Resonanz), machen wir den Ansatz

  $$f_{p_2}(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x).$$

  Zweimaliges Ableiten ergibt

  $$\begin{aligned} f'_{p_2}(x) &= -\alpha\sin(x) + \beta\cos(x), \\ f''_{p_2}(x) &= -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x). \end{aligned}$$

  Setzt man diese Ableitungen in die Differentialgleichung ein, so erhält man

  $$(\alpha - 3\beta)\cos(x) + (3\alpha + \beta)\sin(x) = 10\cos(x).$$

  Damit ist $\alpha = 1$ und $\beta = -3$. Also

  $$f_{p_2}(x) = \cos(x) - 3\sin(x).$$

Insgesamt erhalten wir $f_p(x) = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x) = 4+3x+x^2+\cos(x)-3\sin(x)$.

SCHRITT 3: In einem dritten und letzten Schritt muss man schließlich noch die oben bestimmte allgemeine homogene Lösung und die oben bestimmte partikuläre Lösung addieren:

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = ae^x + be^{2x} + 4 + 3x + x^2 + \cos(x) - 3\sin(x)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad h(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay.$$

b) (*7 Punkte*) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + h(x).$$

c) (*1 Punkt*) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems zum Anfangswert $y(0) = v$.

Lösung

a) Das charakteristische Polynom von A ist $Q(X) = (X-1)(X-3)(X+2)$ mit Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$.

Für λ_1 bekommen wir den Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für λ_2 den Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und für λ_2 den Eigenvektor $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich die allgemeine homogene Lösung als

$$y_{\mathrm{h}}(x) = c_1 e^{x} v_1 + c_2 e^{3x} v_2 + c_3 e^{-2x} v_3 = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} \\ c_2 e^{3x} \\ c_3 e^{-2x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Es ist

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Es ist $W(0) = I_3$, deshalb $W(x)^{-1} = W(-x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$.

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ c_3'(x) \end{pmatrix} &= W(x)^{-1}h(x) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x} \\ e^{-2x} \\ xe^{4x} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Also kann man beispielsweise

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ c_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x} \\ -1/2e^{-2x} \\ xe^{4x}/4 - e^{4x}/16 \end{pmatrix}$$

wählen und erhält als eine partikuläre Lösung

$$y_{\mathrm{p}}(x) = W(x)c(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -1/2e^{x} \\ xe^{2x}/4 - e^{2x}/16 \end{pmatrix}$$

Zusammen ergibt sich die allgemeine inhomogene Lösung zu

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{\mathrm{h}}(x) + y_{\mathrm{p}}(x) \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^{x} \\ c_2e^{3x} \\ c_3e^{-2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -1/2e^{x} \\ xe^{2x}/4 - e^{2x}/16 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

c) Es gilt

$$y(0) = \begin{pmatrix} c_1 + 1 \\ c_2 - 1/2 \\ c_3 - 1/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit $c_1 = 2, c_2 = 1/2$ und $c_3 = 1/16$. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \begin{pmatrix} 2e^{x} \\ 1/2e^{3x} \\ 1/16e^{-2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -1/2e^{x} \\ xe^{2x}/4 - e^{2x}/16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben ist die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

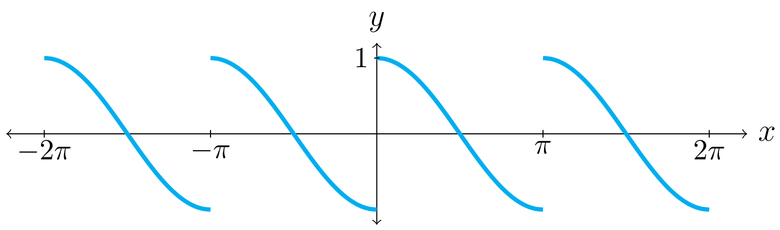
$$f(x) = \begin{cases} -\cos x & \text{für } -\pi < x \leq 0 \\ \cos x & \text{für } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(a) (*2 Punkte*) Skizzieren Sie den Graphen von f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

(b) (*8 Punkte*) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.

Lösung

(a)



(b) Die Funktion f ist ungerade, folglich ist die Fourier-Reihe von f eine reine Sinusreihe, d.h. es gilt

$$a_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ =& \frac{2}{\pi} \left([\sin x \sin(nx)]_0^\pi - n \int_0^\pi \sin x \cos(nx) \, \mathrm{d}x \right) \\ =& -\frac{2n}{\pi} \left([-\cos x \cos(nx)]_0^\pi - n \int_0^\pi \cos x \sin(nx) \, \mathrm{d}x \right) \\ =& \frac{2n}{\pi} \left(((-1)(-1)^n - 1) + n \int_0^\pi \cos(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \right) \\ =& \frac{2n}{\pi} ((-1)^{n+1} - 1) + n^2 b_n \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$(1 - n^2) b_n = \frac{2n}{\pi} ((-1)^{n+1} - 1).$$

Für $n \neq 1$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2n}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1} - 1}{1 - n^2} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \dfrac{-4n}{\pi(1 - n^2)} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Für $n = 1$ gilt

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(2x)\right]_0^{\pi} = 0.$$

Damit erhalten wir die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{((-1)^{n+1}-1)n}{1-n^2}\sin(nx) \\ &\sim \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2-1}\sin(2kx). \end{aligned}$$