Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 17.10.2022 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **24.10.2022** bis **26.10.2022** einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und Funktionengrenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(\ln(2))^k}{k!}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+4}-n\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln(4x)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n-5}$

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(a) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{7^n}{n} x^n$, für welche divergiert sie?

(b) Für welche komplexen Zahlen z konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n (z+2-3\mathrm{i})^n$, für welche divergiert sie?

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1-3k}{4^{k+1}} = \frac{n+1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4}\,.$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto x_1^2 + x_2 - \frac{1}{2}$$

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\colon \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mapsto (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$$

sowie der Halbkreis $K := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0,\ x_2 \geqq 0 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung C von K.

(b) Bestimmen Sie $\nabla f\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\nabla g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Für welche $x \in K$ gilt $\nabla g\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 0$?

(c) Wählen Sie eine Parametrisierung C von K und bestimmen Sie alle Minimal- und Maximalstellen von $f \circ C$.

(d) Bestimmen Sie alle Minimal- und Maximalstellen von f in K.

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Gegeben seien die Drehung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Ebene E, welche durch die Punkte $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $P_3 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ verläuft.

(a) Bestimmen Sie die Drehachse R von φ.

(b) Bestimmen Sie eine Hesse-Normalform von E.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Bildebene $\varphi(E) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = \varphi(x) \text{ für ein } x \in E\}$.

Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int \frac{1+5x}{1-x^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Gegeben seien $f:\mathbb{R}^3\backslash\left\{(0,0,0)^{\intercal}\right\}\to\mathbb{R}\colon f(x)=\dfrac{1}{|x|}$ und die Kurve K mit der Parametrisierung $C\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^3\colon C(t)=(\cos(t),\sin(t),t)^{\intercal}$.

Bestimmen Sie

$$\int_K f(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 8 (*6 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $-64\mathrm{i} =$

Bestimmen Sie alle Lösungen von $w^3 = -64\mathrm{i}$. Geben Sie diese sowohl in Polarkoordinaten als auch in der Form $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

(b) Es sei $z = \dfrac{\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)}{1+\mathrm{i}}$. Berechnen Sie $|z|$ und $\arg z \in [0, 2\pi)$.

$|z| =$, $\arg z =$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. Geben Sie zu jedem Eigenwert λ dessen algebraische Vielfachheit e_λ, dessen geometrische Vielfachheit d_λ sowie den zugehörigen Eigenraum $V(\lambda)$ an.

Aufgabe 10 (*4 Punkte*) Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\colon f(x) = \dfrac{1}{x}$. Bestimmen Sie

$f'(x) =$ $f''(x) =$

Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_4(f, x, 1) =$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Sei $\mathbb{G} = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ein kartesisches Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{E}$ das Standardkoordinatensystem. Weiter sei $P \in \mathbb{R}^2$ mit ${}_{\mathbb{G}}P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ${}_{\mathbb{E}}P =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie die Abbildungsvorschriften der Koordinatentransformationen ${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}$ und ${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}$ an.

${}_{\mathbb{E}}\kappa_{\mathbb{G}}(v) =$ $\boxed{}$

${}_{\mathbb{G}}\kappa_{\mathbb{E}}(v) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Sei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $B:\ b_1, b_2, b_3$ die Basis mit Basisvektoren $b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Betrachten Sie die von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Abbildung $\varphi_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon x \mapsto A_t\, x$ mit

$$ {}_{E}(\varphi_t)_{E} = A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -t & 0 & 3t \\ 0 & t(1-t) & 0 \end{pmatrix} $$

(a) Für welche t ist die Abbildung φ_t **nicht** bijektiv? $t \in \left\{ \boxed{} \right\}$

(b) Geben Sie ${}_{E}\mathrm{id}_{B}$ an: ${}_{E}\mathrm{id}_{B} =$ $\boxed{}$

(c) Sei nun $t = 1$. Bestimmen Sie ${}_{B}\mathrm{id}_{E}$, ${}_{E}(\varphi_1)_{B}$ und ${}_{B}(\varphi_1)_{B}$:

${}_{B}\mathrm{id}_{E} =$ $\boxed{}$ ${}_{E}(\varphi_1)_{B} =$ $\boxed{}$ ${}_{B}(\varphi_1)_{B} =$ $\boxed{}$
