Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Wirtschaftsinformatik (Prüfungsnummer 1000510000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–7** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 8–12** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **26.09.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **17.10.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^n \cdot n!}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$

Aufgabe 2 (4+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x^2-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \ (x,y) \mapsto f(x,y) := x^2(y-5) + y^3 - 12y$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y)$ und $\mathrm{H}_f(x,y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle von f, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Aufgabe 4 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) \ &:= \ \mathrm{e}^{xy} + yz \cdot \mathrm{e}^4 \\ g = g_1 \ &: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \ (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) \ &:= \ x^3 + y^3 + 6xz - 16 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P := (2,2,0) \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Bitte wenden →

Aufgabe 5 (4+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{10x+20}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2\mathrm{i}} + \frac{C}{x-2\mathrm{i}}$$

für $x \in \mathbb{R}_{>1}$.

(b) Berechnen Sie auf $\mathbb{R}_{>1}$ das Integral

$$\int \frac{10x+20}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x \ .$$

Aufgabe 6 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Seien 250€ zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt. Zum Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beträgt das Kapital also $K(x) = 250 \cdot 1{,}05^x$.

(1) Berechnen Sie die Ableitung $K'(x)$.

(2) Bestimmen Sie die Elastizität $\mathrm{E}_K(x)$.

(b) Es wird zu Beginn ein Kredit in Höhe von 2100€ aufgenommen. Es ist also $K_0 = -2100$€. Es ist ein Zinssatz von 10% vereinbart worden, also ein Zinsfaktor von $q = \frac{11}{10}$. Es wurde nachschüssige Ratenzahlung vereinbart. Wie hoch muss die jährliche Rate R sein, damit der Kredit nach 2 Jahren abbezahlt ist, damit also $K_2 = 0$ ist?

Aufgabe 7 (3+4 Punkte) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit

$$y' \ = \ \frac{1}{1+x}\,y + x^2 - 1$$

und mit $y(0) = 4$.

(b) Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' - 4y' + 13y = 2\mathrm{e}^{5x} \ .$$

Aufgabe 8 (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{x+2}$.
Sei $g := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto g(x) := \dfrac{x+1}{x}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqslant x \leqslant +3$.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von g.

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : y \mapsto g^{-1}(y) = \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie die Verkettung $g \circ f$.

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto (g \circ f)(x) = \boxed{}$$

Aufgabe 9 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} = \boxed{}$$

Bitte wenden →

Aufgabe 10 (1+1+3 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s := \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie: $\det(A_s) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie:

$$\{\, s \in \mathbb{R} \,:\, A_s \text{ ist invertierbar} \,\} \;=\; \boxed{}$$

(c) Bestimmen Sie für $s = 0$ die Inverse der Matrix A_0.

$$A_0^{-1} \;=\; \boxed{}$$

Aufgabe 11 (2+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x)^2 \cos(x)^2 = a \cdot \cos(4x) + b$.

$$a \;=\; \boxed{} \qquad b \;=\; \boxed{}$$

(b) Bestimmen Sie folgendes Integral.

$$\int \sin(x)^2 \cos(x)^2 \, \mathrm{d}x = \Big[\boxed{} \Big]$$

Aufgabe 12 (2+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{14+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}} = a + b\mathrm{i}$: $\quad a \;=\; \boxed{}, \quad b \;=\; \boxed{}$

(b) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definiert durch $x_{n+1} = -x_n + (-1)^n$ und $x_0 = 0$.

Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form: $\quad x_n = \boxed{}$.
