Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Version für Wirtschaftsinformatik (Prüfungsnummer 1000510000)

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–7** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 8–12** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 60 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **26.09.2022** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt, wird darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen dafür mit dem Prüfer bis zum **17.10.2022** einen Termin vereinbaren. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot n!}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$

Lösung.

(a) Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}} .$$

(b) Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right) - 1 = \frac{1}{1-(-\frac{1}{5})} - 1 = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6} .$$

Aufgabe 2 (4+2 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (x^2-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,\mathrm{d}x$

Lösung.

(a) Eine Stammfunktion von $f(x) := x^2-1$ ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$.

Außerdem gilt für $g(x) := \ln(x)$, dass $g'(x) = \frac{1}{x}$ ist.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}} (x^2-1)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\ln(x)\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\ln(x)\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{3}x^2 - 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\cdot\ln(x)\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} - \left[\frac{1}{9}x^3 - x\right]_{x=1}^{\mathrm{e}} \\
&= \left(\left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - \mathrm{e}\right) - 0\right) - \left(\left(\frac{\mathrm{e}^3}{9} - \mathrm{e}\right) - \left(\frac{1}{9} - 1\right)\right) \\
&= \frac{2}{9}\mathrm{e}^3 - \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $u(x) := x^3 + x$ ist $u'(x) = 3x^2+1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[2\sqrt{u}\right]_{u=2}^{10} = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) := x^2(y - 5) + y^3 - 12y$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x, y)$ und $\mathrm{H}_f(x, y)$.

(b) Bestimmen Sie alle Flachstellen von f.

(c) Entscheiden Sie für jede Flachstelle von f, ob es sich um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder eine Sattelstelle handelt.

Lösung.

(a) Es ist

$$\nabla_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(y-5) \\ x^2+3y^2-12 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y-10 & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix} .$$

(b) Eine Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Flachstelle von f, falls $\nabla_f(x, y) = 0$ gilt.

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x(y-5) &= 0 \\ x^2 + 3y^2 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

lösen.

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $x = 0$ oder $y = 5$ ist.

Fall 1: $x = 0$. Einsetzen in die 2. Gleichung verlangt, dass $3y^2 - 12 = 0$ ist, d.h. $y = -2$ oder $y = 2$.

Fall 2: $y = 5$. Einsetzen in die 2. Gleichung verlangt, dass $0 = x^2 + 75 - 12 = x^2 + 63$ ist. Da $x^2 \geqslant 0$ ist, ist dies unlösbar. Also liefert dieser Fall keine Flachstellen.

Wir erhalten somit die folgenden Flachstellen von f:

$$(0, -2)\,, \quad (0, 2)\,.$$

(c) Wir untersuchen die Flachstellen aus Teil (a).

Es ist $\mathrm{H}_f(0, -2) = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$. Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0, -2)) = -14 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0, -2)) = \det(\mathrm{H}_f(0, -2)) = 168 > 0$. Somit ist sie negativ definit. Also ist $(0, -2)$ eine lokale Maximalstelle von f.

Es ist $\mathrm{H}_f(0, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$. Die Hauptminoren dieser Matrix sind $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0, 2)) = -6 < 0$ und $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0, 2)) = \det(\mathrm{H}_f(0, 2)) = -72 < 0$. Somit ist sie weder positiv noch negativ definit. Da zudem $\det(\mathrm{H}_f(0, 2)) \neq 0$ ist, ist $(0, 2)$ eine Sattelstelle von f.

Aufgabe 4 (4+1+1+4 Punkte) Seien folgende Funktionen gegeben.

$$\begin{array}{rcl} f &:& \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) &:=& \mathrm{e}^{xy} + yz \cdot \mathrm{e}^4 \\ g = g_1 &:& \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) &:=& x^3 + y^3 + 6xz - 16 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie $\nabla_f(x,y,z)$ und $\nabla_g(x,y,z)$. Bestimmen Sie $\mathrm{H}_f(x,y,z)$ und $\mathrm{H}_g(x,y,z)$.

(b) Stellen Sie das Gleichungssystem auf, mit welchem die Flachstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können.

(c) Sei $P := (2,2,0) \in \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie, dass P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

(d) Ist P eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$?

Lösung.

(a) Es ist $\nabla_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} \\ x\mathrm{e}^{xy}+z\cdot\mathrm{e}^4 \\ y\cdot\mathrm{e}^4 \end{pmatrix}$ und $\nabla_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+6z \\ 3y^2 \\ 6x \end{pmatrix}$.

Es ist

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2\mathrm{e}^{xy} & xy\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{xy} & 0 \\ xy\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{xy} & x^2\mathrm{e}^{xy} & \mathrm{e}^4 \\ 0 & \mathrm{e}^4 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 6 \\ 0 & 6y & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(b) Wir stellen das Gleichungssystem auf, mit welchem Flachstellen unter der Nebenbedingung $g = 0$ ermittelt werden können. Für ein $\rho \in \mathbb{R}$ soll $\nabla_f(x,y,z) = \rho \cdot \nabla_g(x,y,z)$ und $g(x,y,z) = 0$ gelten.

Dies liefert das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcl} y\mathrm{e}^{xy} &=& \rho \cdot (3x^2 + 6z) \\ x\mathrm{e}^{xy} + z \cdot \mathrm{e}^4 &=& \rho \cdot 3y^2 \\ y \cdot \mathrm{e}^4 &=& \rho \cdot 6x \\ x^3 + y^3 + 6xz - 16 &=& 0 \end{array}$$

(c) Einsetzen des Punktes $P = (2,2,0) \in \mathbb{R}^3$ liefert

$$\begin{array}{rcl} 2\mathrm{e}^4 &=& \rho \cdot 12 \\ 2\mathrm{e}^4 &=& \rho \cdot 12 \\ 2\mathrm{e}^4 &=& \rho \cdot 12 \\ 0 &=& 0\,. \end{array}$$

Dies wird durch $\rho = \frac{\mathrm{e}^4}{6}$ gelöst.

Da $N(P) = \nabla_g(P) = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ nur aus einer Spalte ungleich null besteht, ist das Spaltentupel von $N(P)$ linear unabhängig.

Somit ist P eine Flachstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit Lagrangemultiplikator $r = \rho = \frac{\mathrm{e}^4}{6}$.

(d) Wir untersuchen, ob P eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ ist.

Es ist $H = \mathrm{H}_f(P) - \rho \cdot \mathrm{H}_g(P) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^4 & 5\mathrm{e}^4 & 0 \\ 5\mathrm{e}^4 & 4\mathrm{e}^4 & \mathrm{e}^4 \\ 0 & \mathrm{e}^4 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{e}^4}{6} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^4 \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen eine Matrix U, deren Spaltentupel eine Basis von

$$\{u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : N(P)^{\mathrm{t}} u = 0\} = \{u \in \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} u = 0\}$$

ist.

Eine Basis des Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $N(P)^{\mathrm{t}} u = 0$ ist gegeben durch $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Folglich ist

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} U^{\mathrm{t}} \cdot H \cdot U &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{e}^4 \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^4 \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^4 \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =: A . \end{aligned}$$

Die Hauptminoren dieser Matrix A sind $\mathrm{M}_1(A) = -6\mathrm{e}^4 < 0$ und

$$\mathrm{M}_2(A) = \det(A) = -25\mathrm{e}^8 < 0 .$$

Mithin ist A weder positiv noch negativ definit, hat aber Determinante ungleich null.

Folglich ist $P = (2, 2, 0)$ eine Sattelstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

Aufgabe 5 (4+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{10x+20}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2\mathrm{i}} + \frac{C}{x-2\mathrm{i}}$$

für $x \in \mathbb{R}_{>1}$.

(b) Berechnen Sie auf $\mathbb{R}_{>1}$ das Integral

$$\int \frac{10x+20}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Lösung.

(a) Die angegebene Gleichung wird nach Multiplikation mit $(x-1)(x^2+4)$ zu

$$\begin{aligned}10x+20 &= A(x^2+4) + B(x-1)(x-2\mathrm{i}) + C(x-1)(x+2\mathrm{i})\\ &= A(x^2+4) + B(x^2-2x\mathrm{i}-x+2\mathrm{i}) + C(x^2+2x\mathrm{i}-x-2\mathrm{i})\\ &= x^2(A+B+C) + x((-2\mathrm{i}-1)B + (2\mathrm{i}-1)C) + 2\mathrm{i}(B-C) + 4A\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert für den Vektor $\begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 1}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i}\\ 0 & -2\mathrm{i}-1 & 2\mathrm{i}-1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\\ 10\\ 0\end{pmatrix}\ .$$

Dieses bringen wir auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 20\\ 0 & -2\mathrm{i}-1 & 2\mathrm{i}-1 & 10\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2\mathrm{i}-1 & 2\mathrm{i}-1 & 10\\ 0 & 2\mathrm{i}-4 & -2\mathrm{i}-4 & 20\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -5 & 30\\ 0 & 2\mathrm{i}-4 & -2\mathrm{i}-4 & 20\end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -4\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 1 & -6\\ 0 & 0 & -4\mathrm{i} & 12\mathrm{i}-4\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -3+\mathrm{i}\\ 0 & 0 & 1 & -3-\mathrm{i}\end{array}\right)$$

Damit ist $A = 6$, $B = -3+\mathrm{i}$ und $C = -3-\mathrm{i}$.

Wir erhalten

$$\frac{10x+20}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{6}{x-1} + \frac{-3+\mathrm{i}}{x+2\mathrm{i}} + \frac{-3-\mathrm{i}}{x-2\mathrm{i}}.$$

(b) Unter Verwendung der Partialbruchzerlegung aus (a) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \frac{10x+20}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{6}{x-1} + \frac{-3+\mathrm{i}}{x+2\mathrm{i}} + \frac{-3-\mathrm{i}}{x-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{6}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-3+\mathrm{i}}{x+2\mathrm{i}} + \frac{-3-\mathrm{i}}{x-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{6}{x-1}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x-2\mathrm{i}} + \frac{1}{x+2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{i}}{x-2\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{x+2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[6\ln(x-1) - 3\ln(x^2+4) + 2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 ((1+1)+2 Punkte)

(a) Seien 250€ zu 5% Jahreszins angelegt. Sei die Zeiteinheit 1 Jahr gewählt.
Zum Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beträgt das Kapital also $K(x) = 250 \cdot 1{,}05^x$.

(1) Berechnen Sie die Ableitung $K'(x)$.

(2) Bestimmen Sie die Elastizität $\mathrm{E}_K(x)$.

(b) Es wird zu Beginn ein Kredit in Höhe von 2100€ aufgenommen. Es ist also $K_0 = -2100$€. Es ist ein Zinssatz von 10% vereinbart worden, also ein Zinsfaktor von $q = \frac{11}{10}$. Es wurde nachschüssige Ratenzahlung vereinbart. Wie hoch muss die jährliche Rate R sein, damit der Kredit nach 2 Jahren abbezahlt ist, damit also $K_2 = 0$ ist?

Lösung.

(a) (1) Es ist $K(x) = 250 \cdot 1{,}05^x = 250 \cdot \mathrm{e}^{x \ln(1{,}05)}$ und daher

$$K'(x) = 250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot \mathrm{e}^{x \ln(1{,}05)} = 250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot 1{,}05^x \;.$$

(2) Es ist $\mathrm{E}_K(x) = \dfrac{K'(x)}{K(x)} \cdot x = \dfrac{250 \cdot \ln(1{,}05) \cdot 1{,}05^x}{250 \cdot 1{,}05^x} = \ln(1{,}05) \cdot x \;.$

(b) Bei nachschüssiger Zahlung gilt $R = \dfrac{q-1}{q^n - 1} \cdot (K_n - q^n K_0)$.

Für $n = 2$, $K_2 = 0$, $K_0 = -2100$ und $q = \frac{11}{10}$ ist somit

$$\begin{aligned} R &= \frac{\frac{11}{10} - 1}{\left(\frac{11}{10}\right)^2 - 1} \cdot \left(0 - \left(\tfrac{11}{10}\right)^2 \cdot (-2100)\right) \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{21}{100}} \cdot \frac{121}{100} \cdot 2100 \\ &= \frac{10}{21} \cdot \frac{121}{100} \cdot 2100 \\ &= 1210 \;. \end{aligned}$$

Es wird somit eine Rate von 1210€ benötigt.

Aufgabe 7 (3+4 Punkte) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen.

(a) Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ mit

$$y' = \frac{1}{1+x}\, y + x^2 - 1$$

und mit $y(0) = 4$.

(b) Bestimmen Sie alle Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y(x)$ mit

$$y'' - 4y' + 13y = 2\mathrm{e}^{5x}\ .$$

Lösung.

(a) Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

mit $a(x) = \frac{1}{1+x}$ und $b(x) = x^2 - 1$. Aus der Anfangswertbedingung entnehmen wir $x_0 = 0$ und $y_0 = y(0) = 4$.

Wir setzen

$$A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x) - \ln(1) = \ln(1+x)$$

und

$$\begin{aligned} F(x) &:= \textstyle\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x (t^2-1)\mathrm{e}^{-\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^2-1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \textstyle\int_0^x t - 1\,\mathrm{d}t = [\frac{1}{2}t^2 - t]_0^x = \frac{1}{2}x^2 - x\ . \end{aligned}$$

Also ist

$$y(x) = \mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0) = \mathrm{e}^{\ln(1+x)}(\tfrac{1}{2}x^2 - x + 4) = (1+x)(\tfrac{1}{2}x^2 - x + 4)$$

die gesuchte Funktion.

(b) Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y'' + 2ay' + by = c(x)$$

mit $a = -2$, $b = 13$ und $c(x) = 2\mathrm{e}^{5x}$.

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung $u(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $u'' - 4u' + 13u = 0$.

Es ist $a^2 = 4 < 13 = b$. Mit $w := \sqrt{b - a^2} = 3$ und $r, s \in \mathbb{R}$ ist jede Lösung von der Form

$$u(x) = \mathrm{e}^{-ax}(r\sin(wx) + s\cos(wx)) = \mathrm{e}^{2x}(r\sin(3x) + s\cos(3x))\ .$$

Um alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung zu finden, genügt es, eine Lösung $\hat{y}(x)$ zu finden und dann die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung zu addieren.

Es ist $c(x) = 2\mathrm{e}^{5x}$ von der Form $\mu\mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $\mu = 2$ und $\lambda = 5$.

Da $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 25 - 20 + 13 = 18 \neq 0$ ist, machen wir den Ansatz

$$\hat{y}(x) = \nu\mathrm{e}^{\lambda x} = \nu\mathrm{e}^{5x}$$

mit $\nu \in \mathbb{C}$.

Wir bestimmen ν, indem wir diesen Ansatz in die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 13y = 2\mathrm{e}^{5x}$ einsetzen.

Es ist $\hat{y}'(x) = 5\nu\mathrm{e}^{5x}$ und $\hat{y}''(x) = 25\nu\mathrm{e}^{5x}$.

Es ist

$$2\mathrm{e}^{5x} \stackrel{!}{=} \hat{y}'' - 4\hat{y}' + 13\hat{y} = 25\nu\mathrm{e}^{5x} - 4 \cdot 5\nu\mathrm{e}^{5x} + 13 \cdot \nu\mathrm{e}^{5x} = 18\nu\mathrm{e}^{5x}$$

genau dann, wenn $2 = 18\nu$ ist, d.h. genau dann, wenn $\nu = \frac{1}{9}$ ist.

Somit ist $\hat{y}(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{5x}$.

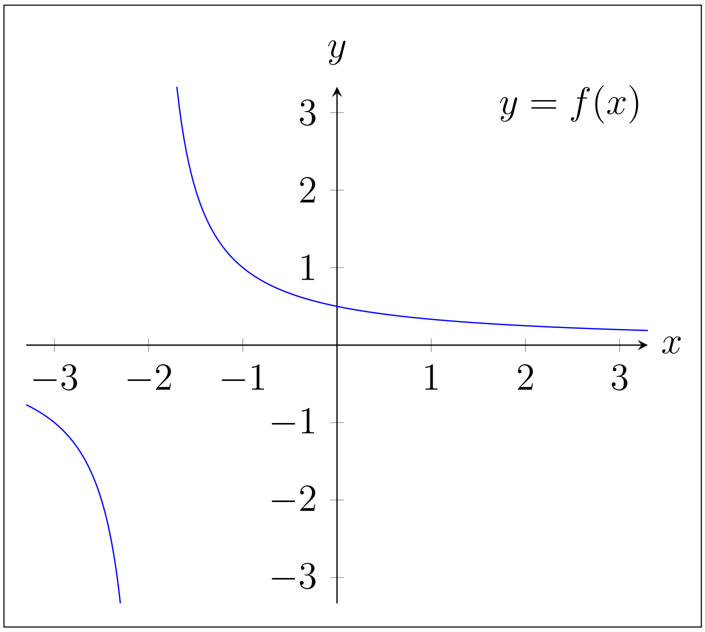
Das heißt, jede Lösung von $y'' - 4y' + 13y = 2\mathrm{e}^{5x}$ ist von der Form

$$y(x) \;=\; u(x) + \hat{y}(x) \;=\; \mathrm{e}^{2x}(r\sin(3x) + s\cos(3x)) + \frac{1}{9}\mathrm{e}^{5x}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8 (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto f(x) := \dfrac{1}{x+2}$.
Sei $g := \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto g(x) := \dfrac{x+1}{x}$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-3 \leqslant x \leqslant +3$.



(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von g.

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} : y \mapsto g^{-1}(y) = \boxed{\frac{1}{y-1}}$$

(c) Bestimmen Sie die Verkettung $g \circ f$.

$$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto (g \circ f)(x) = \boxed{x+3}$$

Aufgabe 9 (1+2 Punkte) Seien $A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $b := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$.

(a) Formen Sie $(A|b)$ so um, dass A in Zeilenstufenform kommt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b$:

$$\{x \in \mathbb{R}^{4\times 1} : Ax = b\} = \boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

Aufgabe 10 (1+1+3 Punkte)

Sei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Sei $A_s := \begin{pmatrix} s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie: $\det(A_s) = \boxed{(s-1)^2}$

(b) Bestimmen Sie:

$$\{\, s \in \mathbb{R} \,:\, A_s \text{ ist invertierbar} \,\} = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

(c) Bestimmen Sie für $s = 0$ die Inverse der Matrix A_0.

$$A_0^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 11 (2+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sin(x)^2 \cos(x)^2 = a \cdot \cos(4x) + b$.

$$a = \boxed{-\tfrac{1}{8}} \qquad b = \boxed{\tfrac{1}{8}}$$

(b) Bestimmen Sie folgendes Integral.

$$\int \sin(x)^2 \cos(x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[\boxed{\tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{32}\sin(4x)} \right]$$

Aufgabe 12 (2+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{14 + 2\mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}} = a + b\mathrm{i}$: $a = \boxed{2}$, $b = \boxed{-2}$

(b) Sei die reelle Folge $(x_n)_{n \geqslant 0}$ definiert durch $x_{n+1} = -x_n + (-1)^n$ und $x_0 = 0$.

Bestimmen Sie x_n in nicht-rekursiver Form: $x_n = \boxed{n \cdot (-1)^{n-1}}$.
