Modulprüfung Mathematik 1 und 2 für inf, swt 2021/2022

Prof. M. Geck, Dr. L. Iancu, Dr. E. Chavli, 13. September 2022

- **Füllen Sie bitte den Umschlagbogen aus und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt, das Sie abgeben. Vergessen Sie bitte nicht Ihre Unterschrift!**
- **Erlaubte Hilfsmittel sind: Acht eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.**
- **Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.**

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (9=3+3+3 Punkte)
Geben Sie hier nur die Antworten zu den einzelnen Fragen an; Zwischenschritte oder Begründungen sind nicht erforderlich (und werden auch nicht bewertet).

(a) Bestimmen Sie $d := \mathrm{ggT}(36, 93)$ sowie ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $d = 36a + 93b$.

(b) Gegeben sei $z := 2-3i \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie jeweils $\overline{z}^2$ und z^{-1} in der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Sei $K = \mathbb{F}_7$ (Körper mit 7 Elementen) und $A_t := \begin{pmatrix} t & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & t & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \in M_3(K)$ für $t \in K$.
Berechnen Sie $\det(A_t)$ und bestimmen Sie alle $t \in K$ mit $\det(A_t) = \bar{0}$.

Bei der Bearbeitung der nachfolgenden 5 Aufgaben genügt es nicht, nur die Lösungen anzugeben, sondern Begründungen und Zwischenrechnungen gehören mit zur Lösung der Aufgabe; d.h., es muss nachvollziehbar sein, wie Sie die Lösungen gefunden haben.

Aufgabe 2. (8=4+4 Punkte) Thema: Matrizen und lineare Gleichungen.
Gegeben sei die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Nullraums $N(A) := \{x \in \mathbb{Q}^4 \mid A \cdot x = 0_2\}$.

(b) Berechnen Sie $B := A \cdot A^{\mathrm{tr}}$. Ist B invertierbar? Wenn ja, so bestimmen Sie B^{-1}.

Aufgabe 3. (11=3+3+3+2 Punkte) Thema: Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit.

Gegeben sei die symmetrische Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom, oder das charakteristische Polnyom von A (Sie könen sich aussuchen, welches Sie bestimmen), sowie alle Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie Basen für die zugehörigen Eigenräume.

(c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $T \in M_3(\mathbb{R})$ sowie eine Diagonalmatrix $D \in M_3(\mathbb{R})$ mit $D = T^{-1} \cdot A \cdot T$.

(d) Ist A positiv-definit, negativ-definit, oder indefinit? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. (10=(3+3)+(2+2) Punkte) Thema: Folgen und Reihen.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (wenn diese existieren):

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2-n)^3 + (-1)^{n^2}}{3n^3 + \sin(n)}$, **(ii)** $\lim\limits_{n\to\infty} \big(n \sin(1/n)\big)$.

(b) Gegeben sei die Folge $a_n := \dfrac{n+2}{2n^2+3}$ für $n \geq 1$.

(i) Zeigen Sie, dass $a_n > \dfrac{1}{2n}$ gilt für alle $n \geq 1$.

(ii) Schließen Sie mit (i), dass die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergiert.

Aufgabe 5. (11=2+3+3+3 Punkte) Thema: Partielle Ableitungen und lokale Extrema.

Gegeben Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$.

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f, sowie die Werte von f an diesen kritischen Punkten. (*Hinweis*: Es gibt 3 kritische Punkte (x,y), einen mit $x = 0$ und zwei mit $x \neq 0$.)

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix für jeden kritischen Punkt von f.

(d) Bestimmen Sie für jeden kritischen Punkt, ob dort ein lokales Minimum oder Maximum vorliegt, oder kein lokales Extremum.

Aufgabe 6. (11=(2+3+2)+4 Punkte) Thema: Integrale und Differentialgleichungen.

(a) Gegeben sei die rationale Funktion $r(x) := \dfrac{2}{x^2+4x+3}$ für $x \geq 0$.

(i) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $r(x)$.

(ii) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) := r(x) + 3\sqrt{2x}$, definiert für alle $x \geq 0$.

(iii) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

(b) Gegeben sei die DGL 1. Ordnung $y' = \frac{3}{2}(y^2 + 4y + 3)\sqrt{2x}$.

Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(x)$ der DGL, für die $y(0) = 1$ gilt.