MODULPRÜFUNG HÖHERE MATHEMATIK 3

FÜR EL

Bitte unbedingt beachten:

- Legen Sie Ihren Studentenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**. Es können bis zu **40 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel** sind zwei eigenhändig beschriebene DIN-A4-Seiten Formelsammlung im Original (oder alternativ eine DIN-A4-Seite doppelseitig beschrieben) sowie Zeichenmaterial. Insbesondere ist es nicht zulässig, die Formelsammlung durch technische Hilfsmittel zu verkleinern. **Bücher, Fotokopien, elektronische Rechengeräte, usw. sind nicht zugelassen.**
- Es gibt insgesamt 6 Aufgaben. Bei **Aufgabe 2** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Benutzen Sie hierfür Ihr eigenes Papier und fangen Sie dabei jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
  Bei den anderen Aufgaben sind nur die Kästchen auszufüllen, Nebenrechnungen werden hier nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer. Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser. Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen bis 15.04.2022 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 $(2+2+2+2+2 = 10$ Punkte$)$**.** Gegeben sei die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \\ 4t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

(a) Bestimmen Sie $\dot{\gamma}(t)$ und die Länge L der Kurve γ.

$$\dot{\gamma}(t) = \boxed{\begin{pmatrix} -3\sin 3t \\ 3\cos 3t \\ 4 \end{pmatrix}}, \qquad L = \boxed{5\pi}. \quad 2$$

Lösung:

$$L = \int_0^\pi |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_0^\pi \sqrt{9\sin^2 3t + 9\cos^2 3t + 16}\, dt = 5\pi.$$

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2axy - ayz + \frac{1}{16}z^2 \\ a(x^2 - y - xz) \\ bxz - 2xy \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Rotation von $\vec{v}$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \boxed{\begin{pmatrix} ax - 2x \\ -ay - bz + 2y + \frac{1}{8}z \\ 0 \end{pmatrix}}. \quad 1$$

(c) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so dass $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist.

$$a = \boxed{2}, \qquad b = \boxed{\frac{1}{8}}. \quad 1$$

Lösung: Es gilt $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ genau dann, wenn $a = 2$ und $b = \frac{1}{8}$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, reicht diese Bedingung, damit $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist.

Punktvergabe: 1 nur wenn beide Werte richtig sind.

(d) Bestimmen Sie ein Potential Φ von $\vec{v}$ für Ihre Wahl von a und b.

$$\Phi(x,y,z) = \boxed{2x^2y - y^2 + \frac{1}{16}xz^2 - 2xyz}. \quad 2$$

Lösung: Wir integrieren die jeweiligen Komponenten partiell:

$$\int 4xy - 2yz + \frac{1}{16}z^2\,dx \to 2x^2y - 2xyz + \frac{1}{16}xz^2$$

$$\int 2x^2 - 2y - 2xz\,dy \to 2x^2y - y^2 - 2xyz$$

$$\int \frac{1}{8}xz - 2xy\,dz \to \frac{1}{16}xz^2 - 2xyz$$

Das liefert das Potential

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2y - y^2 + \frac{1}{16}xz^2 - 2xyz.$$

Punktvergabe: 1 falls mindestens zwei Terme richtig sind.

(e) Berechnen Sie das Kurvenintegral für Ihre Wahl von a und b.

$$\int_\gamma \langle \vec{v}, dx\rangle = \boxed{-\pi^2}. \quad 1$$

Lösung: Mit dem Haupsatz für Kurvenintegrale gilt

$$\int_\gamma \langle \vec{v}, dx\rangle = \int_\gamma \langle \nabla\Phi, dx\rangle = \Phi(\gamma(\pi)) - \Phi(\gamma(0)).$$

Ferner gilt

$$\Phi(\gamma(\pi)) = \Phi\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\4\pi\end{pmatrix}\right) = -\pi^2, \text{ und } \Phi(\gamma(0)) = \Phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^3$ die Hohlkugel

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4\}.$$

Ferner sei das Vektorfeld $\vec{v} : B \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \arctan(z) + 1 \\ 3\sqrt{xz} + y \\ \frac{1}{2} z^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle \, d\sigma.$$

Hierbei bezeichnet $\vec{n}$ den nach außen orientierten Einheitsnormalenvektor.

Bitte vollständige Argumentationsschritte auf separatem Papierblatt angeben.

Aufgabe 3 ($2 + 2 + 1 = 5$ Punkte)**.** Es bezeichne $B \subset \mathbb{R}^2$ die obere Hälfte der Einheitskreisscheibe und ferner sei die Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -2xy \sin(y^2).$$

(a) Schreiben Sie B als Normalbereich vom Typ I:

$$B = \boxed{\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}} \qquad 1$$

(b) Drücken Sie das Integral durch ein Doppelintegral aus:

$$\int_B f \, dv = \boxed{\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy} \qquad 1$$

(c) Bestimmen Sie den Wert des Doppelintegrals aus Teil (b):

$$\int_B f \, dv = \boxed{0} \qquad 2$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_B f \, dv &= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} -2xy \sin(y^2) \, dy \\
&= \int_{-1}^{1} dx \ -2x \left[-\frac{1}{2} \cos(y^2) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1} x \cos(1 - x^2) - x \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} x \cos(1 - x^2) \, dx - \int_{-1}^{1} x \, dx = 0.
\end{aligned}$$

Das vordere Integral lässt sich zum Beispiel mit der Substitution $u = 1 - x^2$ auf $-\frac{1}{2} \int \cos(u) \, du$ umformen und einfach berechnen.

Aufgabe 4 $(1+1+1+3+2=8$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 3y'' + 4y = 50 \sin t. \tag{1}$$

Sie dürfen als bekannt annehmen, dass $\lambda_1 = -1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(a) Finden Sie eine weitere Nullstelle des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_2 = \boxed{2}. \quad 1$$

Lösung: Für das charakteristiche Polynom χ gilt

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda+1)(\lambda-2)^2.$$

(b) Schreiben Sie die allgemeine reelle Lösung der zu (1) gehörigen *homogenen* Differentialgleichung.

$$y_h(t) = \boxed{c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}}. \quad 1$$

(c) Finden Sie $a \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(ae^{it}) = 50 \sin t$:

$$a = \boxed{-50i}. \quad 1$$

(d) Finden Sie eine reelle partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung (1):

(komplexer) Ansatz: $\boxed{\tilde{y}_p(t) = ce^{it}}$, 1

$$y_p(t) = \boxed{\cos t + 7 \sin t}. \quad 2$$

Lösung: Wir betrachten die Komplexifizierung

$$y'''(t) - 3y''(t) + 4y(t) = -50ie^{it}$$

und suchen dementsprechend eine (komplexe) partikuläre Lösung mit dem Ansatz $\tilde{y}_p(t) = ce^{it}$, $c \in \mathbb{C}$. Einsetzen liefert

$$(-ic + 3c + 4c)e^{it} = -50ie^{it},$$

also

$$c = \frac{-50i}{7-i} = \frac{-50i(7+i)}{(7-i)(7+i)} = 1 - 7i$$

und damit

$$\tilde{y}_p(t) = (1-7i)e^{it} = (1-7i)(\cos t + i \sin t) = \cos t + i \sin t - 7i \cos t + 7 \sin t.$$

Davon nehmen wir den Realteil:

$$y_p(t) = \mathrm{Re}(\tilde{y}_p(t)) = \cos t + 7 \sin t.$$

Punktvergabe: 1 falls die Lösung reell ist.

(e) Bestimmen Sie für $t > 0$ eine *beschränkte* Lösung y von (1) (d.h. $\sup_{t>0} |y(t)| < \infty$) mit $y(0) = 0$:

$$y(t) = \boxed{\cos t + 7\sin t - e^{-t}}.$$ 2

Lösung: Alle Lösungen sind von der Form

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \cos t + 7\sin t + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t}.$$

Die Funktion y ist genau dann beschränkt für $t > 0$, wenn $c_2 = c_3 = 0$. Einsetzen $y(0) = 0$ liefert $c_1 = -1$. *Punktvergabe:* 1 falls eins der Folgenden gilt:

- Die Lösung ist von der Form $y_p + y_h$.
- Die Lösung ist beschränkt für $t > 0$.
- Die Lösung erfüllt $y(0) = 0$.

Aufgabe 5 (1 + 2 + 1 + 1 = 5 Punkte)**.** Folgendes Anfangswertproblem für eine Integrodifferentialgleichung ist mithilfe der Laplace-Transformation zu lösen:

$$\dot{y}(t) + \int_0^t y(\tau)\cosh(t-\tau)\,d\tau = 0, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $\cosh t$:

$$\cosh t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \boxed{\frac{s}{s^2-1}}.$$

(b) Schreiben Sie das Anfangswertproblem (2) als Gleichung für $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$\boxed{sY(s) - 1 + \frac{s}{s^2-1}Y(s) = 0}.$$

Lösung: Es gilt $\dot{y}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sY(s) - y(0)$.

Das Integral $\int_0^t y(\tau)\cosh(t-\tau)\,dt$ ist die Faltung von y und cosh, deshalb erhalten wir das Produkt der entsprechenden Laplace-Transformierten.

(c) Lösen Sie dann Ihre Gleichung aus Teil (b) nach $Y(s)$ auf:

$$Y(s) = \boxed{\frac{s^2-1}{s^3}}.$$

(d) Bestimmen Sie $y(t)$:

$$y(t) = \boxed{1 - \frac{t^2}{2}}.$$

Lösung: Das folgt aus der Regel $\frac{t^n}{n!} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{n+1}}$.

Aufgabe 6 (1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte)**.** Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die (reellen) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ von A:

$$\lambda_1 = \boxed{1}, \qquad \lambda_2 = \boxed{2}, \qquad \lambda_3 = \boxed{2}.$$

1

(b) Nennen Sie eine Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ aus Eigen- und Hauptvektoren von A, wobei $\mathbf{v}_i$ zu λ_i gehören soll.

$$\mathbf{v}_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{v}_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \qquad \mathbf{v}_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) Bestimmen Sie drei linear unabhängige Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_1 = \boxed{}, \qquad \mathbf{x}_2 = \boxed{}, \qquad \mathbf{x}_3 = \boxed{}.$$

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x}(t) = \boxed{}.$$

2